R.K.

GROUP OF COLLEGE

Behind Kalwar Police Station, Kalwar, Jaipur (Raj.)

उदाहरण 6.04 यदि f अन्तराल $[0, a]$ में परिभाषित $f(x) = x^2$ हो तो दि कीजिए कि $f \in R\ [0, a]$ तथा $\int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^3}{3}$ जहाँ $a > 0$ और $x \in [0, a]$. (If f *defined on* $[0, a]$, $a > 0$ *by* $f(x) = x^2$, $x \in [0, a]$ *then show that* $f \in R\ [0,$ *and* $\int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^3}{3}$).

[Raj 2009, 11; Udaipur 2000, 06, 08, 15; Jodhpur 2003, 04, 0 Kota 2013; Ajmer 201

हल : माना कि अन्तराल $[0, a]$ का n समान भागों में विभक्त किया तब विभाज

$$P = \left\{0 = \frac{0}{n}, \frac{a}{n}, \ldots\ldots, \frac{r-1}{n}a, \frac{ra}{n}, \ldots\ldots, \frac{na}{n} = a\right\}$$

P विभाजन P के r वें उपअन्तराल $\left[\frac{(r-1)a}{n}, \frac{ra}{n}\right]$ में फलन f के उच्चक $M_r = \left(\frac{ra}{n}\right)^2$

तथा $m_r = \left[\frac{(r-1)a}{n}\right]^2$ तथा $\delta_r = \frac{a}{n}$, $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ चूँकि $f(x) = x^2$ तथा f अन्तराल $[0, a]$ में एकदिष्ट वर्धमान फलन है।

अब
$$U(f, P) = \sum_{r=1}^{n} M_r \delta_r = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{r^2 a^2}{n^2}\right) \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

तथा
$$L(f, P) = \sum_{r=1}^{n} m_r \delta_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)^2 a^2}{n^2} \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^{n} (r-1)^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

हम किसी दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए एक $n \in \mathbf{N}$ प्राप्त कर सकते है ताकि

$\frac{a^3}{n} < \varepsilon \Rightarrow a^3 / n < \varepsilon$

अतः प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए $[0, a]$ का एक विभाजन P विद्यमान होगा ताकि

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \Rightarrow f \in \mathbf{R}[0, a]$$

अब किसी भी $P \in \mathbf{P}[0, a]$ के लिए

$$\bar{\int_0^a} f(x)dx = Inf\{U(f, P) : P \in \mathbf{P}[0, a]\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{3}$$

तथा
$$\underline{\int_0^a} f(x)dx = Sup\{L(f, P) : P \in \mathbf{P}[0, a]\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{3}$$

$$\therefore \quad \bar{\int_0^a} f(x)dx = \underline{\int_0^a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}$$

अतः $f \in \mathbf{R}[0, a]$ तथा $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}$

$$0, (x, y) = (0,0)$$

तो सिद्ध कीजिए कि पुनरावृत्ति सीमा बिन्दु (0, 0) पर अस्तित्व है और
परन्तु युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं है। (Then prove that repeated limit e
(0, 0) and are equal but the simultaneous limit does not exist).

[Raj. 2008; Bikaner

हल : यहाँ $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ जब $(x,y) \neq (0,0)$ तब

$$\underset{x\to 0}{Lim}\ \underset{y\to 0}{Lim} f(x,y) = \underset{x\to 0}{Lim}\left(\frac{0}{x^2}\right) = 0$$

तथा $$\underset{y\to 0}{Lim}\ \underset{x\to 0}{Lim} f(x,y) = \underset{y\to 0}{Lim}\left(\frac{0}{y^2}\right) = 0$$

फलतः पुनरावृत्ति सीमा का अस्तित्व है और शून्य के बराबर है।

अब हम जानते हैं कि यदि $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} f(x,y)$ का अस्तित्व है तो
उपगमन पथ से स्वतन्त्र होगा जिसके अनुदिश हम (0, 0) को अग्रसित होती है।

अब मान लेते हैं कि उपगमन पथ रेखा $y = mx$ के अनुदिश (0, 0) को
अग्रसित होती है तो

$$\underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{Lim} f(x,y) = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$= \underset{x\to 0}{Lim}\frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2}, \quad (y = mx \text{ रखने पर})$$

$$= \underset{x\to 0}{Lim}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

जो कि m पर आधारित है अर्थात् m के विभिन्न मानों के लिए भिन्न-भिन्न होगी फलतः सीमा उपगमन पथ पर निर्भर करती है इसलिए $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 4.46 माना कि (Let) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, तब बिन्दु (0, 0) पर फलन की पुनरावृत्ति और युगपत सीमा के अस्तित्व की व्याख्या कीजिए। (then explain the existence of repeated limit and simultaneous limit of the function at the point (0, 0)).

हल : यहाँ

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\} = \lim_{y\to0}\left\{\frac{0}{y^2}\right\} = 0$$

और $$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\left\{\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\} = \lim_{x\to0}\left\{\frac{0}{x^2}\right\} = 0$$

अतः पुनरावृत्ति सीमा का अस्तित्व है एवं दोनों बराबर है एवं युगपत् सीमा के मूल्यांकन के लिए (x, y) को (0, 0) की ओर उपगमन पथ $y = x$ एवं $y = 2x$ लेते है।

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left\{\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$$

$$= \lim_{x\to0} 1 = 1 \ (y = x \text{ लेने पर})$$

पुनः $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\left\{\frac{4x^4}{4x^4+x^2}\right\} = 0 \ (y = 2x \text{ लेने पर})$$

अतः उपगमन पथ $y = x$ एवं $y = 2x$ लेने पर सीमाओं के मान भिन्न है।

फलतः $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$ विद्यमान है। परन्तु युगपत $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ विद्यमान नहीं है।

टिप्पणी: पुनरावृत्त सीमाओं का क्रम परस्पर बदला जा सकता है अर्थात्

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$$

परन्तु युगपत् सीमा का विद्यमान होना आवश्यक नहीं है जो निम्न उदाहरण से स्पष्ट है।

§ 6.07 R – समाकलनीय फलनों के विशेष वर्ग

(Particular Classes of R – Integrable Functions)

प्रमेय 6.12 यदि फलन f, $[a, b]$ में संतत है, तो सिद्ध कीजिए कि यह परिबद्ध अन्तराल $[a, b]$ पर R – समाकलनीय होगा। (*Let f be a continuous function defined on $[a, b]$. prove that f is R – integrable over $[a, b]$ i. e. $f \in R[a, b]$*).

[Raj. 2006, 11, 13; Kota 2006, 08, 13; Udaipur 2000, 03, 05, 08 (S), Jodhpur 2003, 04, 05, 07 (Old), 07 (New), 09, 13; Ajmer 2004, 06; Bikaner 2004, 06, 09, 11, 12]

उपपत्ति : हम जानते है कि $[a, b]$ पर परिभाषित प्रत्येक संतत फलन $[a, b]$ में परिबद्ध एवं एकसमान संतत होता है। तथा फलन f जो $E \subset R$ पर परिभाषित है, E पर एक समान संतत होता है यदि प्रत्येक $\epsilon' > 0$ के लिए $\exists\ \delta > 0$ ताकि $|f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon'$ जबकि $|\alpha - \beta| < \delta\ \forall\ \alpha, \beta \in E$

माना कि $\epsilon > 0$ तथा $[a, b]$ का कोई विभाजन

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n = b\},\ \|P\| < \delta \text{ है।}$$

चूँकि f, $[a, b]$ पर संतत है भी प्रत्येक अन्तराल $[x_{r-1}, x_r]$ पर फलन f संतत है

अतः वह अपने निम्नक m_r उच्चक M_r को किन्हीं बिन्दुओं c_r तथा $d_r \in [x_{r-1}, x_r]$ पर ग्रहण करेगा।

फलतः $m_r = f(c_r)$ एवं $M_r = f(d_r)$

चूँकि $|c_r - d_r| < \delta$ अतः f की एकसमान सांतत्यता से

$$|f(c_r) - f(d_r)| < \epsilon/(b-a)$$

परन्तु $$|f(c_r) - f(d_r)| = f(d_r) - f(c_r) \quad [\because f(d_r) \geq f(c_r)]$$

$$= M_r - m_r$$

$$\therefore M_r - m_r < \varepsilon/(b-a) \; \forall \; r = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

अब $$0 \leq U(f, P) - L(f, P) = \sum_{r=1}^{n} M_r (x_r - x_{r-1}) - \sum_{r=1}^{n} m_r (x_r - x_{r-1})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{r=1}^{n} (x_r - x_{r-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

फलतः फलन f, R – समाकलनीय है।

टिप्पणी : ऐसे फलन भी विद्यमान होते हैं जो कि समाकलनीय तो होते हैं। परन्तु सतत फलन नहीं होते हैं। अतः समाकलनीय फलनों के लिए सांतत्यता पर्याप्त शर्त है आवश्यक नहीं।

अतः इससे हम निश्कर्ष निकालते हैं कि वैडले नियम अन्य नियमों से ज्यादा यथा है।

उदाहरण 6 : सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{3}{8}$ नियमों के उपयोग द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मूल्यांकन कीजिए। फलतः प्रत्येक स्थिति में π मान ज्ञात कीजिए:

Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ and $\frac{3}{8}$ rule. Hence obtain the approximate value of π in each case.

[Ajmer 05, Udaipur 06, 08; Kota 05, Jodhpur 06, 12]

हल: चूँकि प्रश्नानुसार हमें समाकलन करने के लिये सिम्पसन का '1/3' तथा '3/8' नियम का उपयोग करना हैं अतः परास [0,1] को ऐसे भागों में विभाजित करना है कि वह 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो सके। इसलिये हम परास [0,1] को छः बराबर भागों में विभाजित करते हैं। यहाँ प्रत्येक भाग की चौड़ाई $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$ है। अब प्रत्येक विभाजित बिन्दु पर फलन $y = \frac{1}{1+x^2}$ का अभिकलित मान जो कि निम्न है:

x	$y = 1/(1+x^2)$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1.00000$
$x_0 + h = 1/6$	$y_1 = (36/37) = 0.97297$
$x_0 + 2h = 2/6$	$y_2 = (36/40) = 0.90000$
$x_0 + 3h = 3/6$	$y_3 = (36/45) = 0.80000$
$x_0 + 4h = 4/6$	$y_4 = (36/52) = 0.69231$
$x_0 + 5h = 5/6$	$y_5 = (36/61) = 0.59016$
$x_0 + 6h = 1$	$y_6 = (1/2) = 0.50000$

(a) सिम्पसन $\frac{1}{3}$ नियमानुसार

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + \ldots)]$$

प्रश्नानुसार,

$$\int_0^1 y\,dx = \frac{1}{18}[(1 + 0.5) + 4(0.97297 + 0.8 + 0.59016)$$

$$+ 2\,(0.9 + 0.69231)]$$

$$= \frac{1}{18}[1.5 + 9.45252 + 3.18462] = 0.785397. \qquad \text{....(1)}$$

(b) सिम्पसन '$\frac{3}{8}$' नियमानुसार।

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3\,(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + ...)$$

$$+ 2\,(y_3 + y_6 + ...)]$$

हलानुसार,

$$\int_0^1 y\,dx = \frac{1}{16}[1 + 0.5 + 3(0.97297 + 0.9 + 0.69231 + 0.59016)$$

$$+ 2\,(0.8)]$$

$$= \frac{1}{16}[1.5 + 9.46632 + 1.6] = 0.785395 \qquad \text{....(2)}$$

साथ ही समाकलन का ठीक मान निम्न है:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{....(3)}$$

(1) एवं (3) से, $\frac{\pi}{4} = 0.785397$ या $\pi = 3.141588$

तथा (2) एवं (3) $\frac{\pi}{4} = 0.785395$ या $\pi = 3.141580$

निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए :