Sec.- B प्रत्येक यूनिट से 1 प्रश्न चुनते हुए कोई 4 प्रश्न चुने।प्रत्येक प्रश्न का अंक भार 15 है।

1 (A) कॉम्पटन विस्थापन तथा प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा के सूत्र व्युत्पन्न कीजिये

1 (B) कॉम्पटन प्रयोग में X-किरण का 60° प्रकीर्णन कोण पर कॉम्पटन विस्थापन 0.121 Å होता है। प्लांक नियतांक का मान ज्ञात कीजिये।

2 (A) . दे-ब्रोगली परिकल्पना क्या है? एक इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध तरंगदैर्ध्य λ के लिये दर्शाइये कि λ=h/2mE जहाँ सभी संकेतों के सामान्य अर्थ हैं। 2 (B) 1 MeV के प्रोटॉन के लिये दे-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य ज्ञात कीजिये।

3 (A) श्रोडिंजर समीकरण की सहायता से सांतत्य समीकरण ∂t∂P+∇.S=0 को प्राप्त कीजिये। 3 (B) . a लम्बाई वाले दृढ़ बॉक्स में x=0.45a तथा x=0.55a के बीच कण के पाये जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये जबकि कण प्रथम उत्तेजित अवस्था में है।

4 (A) एक कण जिसकी ऊर्जा E विभव सीढ़ी की ऊँचाई V0 से कम है. के लिये परावर्तन एवं पारगमन गुणांक ज्ञात कीजिये 4 (B) .100 eV ऊँचाई एवं 01 mm चौड़ाई की विभव रोधिका पर 64 eV ऊर्जा का एक इलेक्ट्रॉन पुंज आपतित है। इलेक्ट्रॉन पुंज के पारगमन की प्रायिकता ज्ञात कीजिये

5(A) किसी परिमित गहराई के विभव कूप में स्थित कण के लिये ऊर्जा आइगेनमान एवं आइगेन फलन ज्ञात कीजिये 5 (B) कोणीय आवृत्ति 1014 rad×s−1 के एक विमीय सरल आवर्ती दोलित्र की द्वितीय उत्तेजित अवस्था में ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

6 (A) 2स्टर्न-गर्लेक प्रयोग का वर्णन कीजिये तथा दर्शाइये कि इलेक्ट्रॉन प्रचक्रण का परिमाण 1/2 होता है। 6 (B) . यदि σ पाउली मैट्रिक्स तथा A स्वेच्छिक सदिश है तब σ·A ज्ञात कीजिये।

7 (A) 1जीमान प्रभाव क्या है? जीमान विपाटन के लिये सूत्र प्राप्त कीजिये 7 (B) NO अणु का जड़त्व आघूर्ण 1.65×10−46 kg−m2 है। इसके प्रथम तीन घूर्णी ऊर्जा स्तर की ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

1 8 (A) संक्षिप्त नोट लिखिये - (i) हुंड नियम (ii) लांदे अंतराल नियम (iii) पाउली अपवर्जन नियम 8 (B) HCl अणु का बल नियतांक 510 Nm−1 है। इसके प्रथम तीन कम्पनिक ऊर्जा स्तर E1.E2 तथा E3 के मान की गणना कीजिये ।

3. कॉम्पटन प्रभाव में प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा तथा दिशा (Direction and Kinetic Energy of Recoil Electron in Compton Effect)

(i) प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा (Kinetic energy of recoil electron)

गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ = आपाती फ़ोटॉन की ऊर्जा – प्रकीर्णित फोटॉन की ऊर्जा

$$K = h\nu - h\nu' = h\nu\left(1 - \frac{\nu''}{\nu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

कॉम्पटन विस्थापन सूत्र [खण्ड 2 समीकरण (7) से] से,

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\phi)$$

या

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu'} = \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\phi) = \alpha(1 - \cos\phi)$$

या

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 + \alpha(1 - \cos\phi) \quad \text{जहाँ} \quad \alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2} \quad \ldots(2)$$

यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$K = h\nu\left[1 - \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\phi)}\right]$$

या

$$K = \frac{h\nu\alpha(1 - \cos\phi)}{[1 + \alpha(1 - \cos\phi)]} \quad \ldots\ldots(3)$$

समीकरण (3) से,

(i) अग्र प्रकीर्णन (forward scattering) की स्थिति में,

$$\phi = 0 \quad , \cos\phi = 1 \quad , \quad K = 0$$

अत:आपाती X-किरण की दिशा में प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा का मान शून्य होता है।

(ii) आपाती X-किरण के लम्बवत दिशा में प्रकीर्णन की स्थिति में.

$$\phi = 90^0 \quad , \cos\phi = 0 \quad , \quad K = \frac{h\nu\alpha}{1+\alpha} = \frac{h^2\nu^2}{h\nu + m_0c^2}$$

(iii) पश्चवर्ती प्रकीर्णन (backward scattering) की स्थिति में,

$$\phi = 180^0 \quad , \cos\phi = -1 \quad , \quad K = \frac{2h\nu\alpha}{1+2\alpha} = \frac{2h^2\nu^2}{2h\nu + m_0c^2}$$

अत: इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा अधिकतम प्राप्त होती है।

यदि फोटोन का तरंगदैर्ध्य λ तथा कॉम्पटन तरंगदैर्ध्य λ_0 हो तो पश्चवर्ती प्रकीर्णन की स्थिति मेंप्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की अधिकतम गतिज ऊर्जा

$$K_{max} = \frac{2h^2\nu^2}{2h\nu + m_0c^2} = \frac{2h^2(c/\lambda)^2}{2h(c/\lambda) + m_0c^2}$$

$$K_{max} = \frac{2h^2c}{\lambda(2h + m_0c\lambda)} = \frac{2m_0c^2\lambda_0^2}{\lambda(\lambda + 2\lambda_0)} \qquad [\because \lambda_0 = h/m_0c]$$

(ii) प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की दिशा (Direction of recoil electron)

खण्ड 2 के समीकरण (3) को समीकरण (2) से भाग देने पर,

$$\tan\theta = \frac{\nu'\sin\phi}{\nu - \nu'\cos\phi} = \frac{\sin\phi}{\left(\frac{\nu}{\nu'} - \cos\phi\right)}$$

समीकरण (2) से (ν/ν')का मान रखने पर,

$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\left[1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}\right](1 - \cos\phi)} = \frac{\cot(\phi/2)}{\left[1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}\right]} \qquad \text{.........(4)}$$

$$\cot(\phi/2) = (1+\alpha)\tan\theta \text{ जहाँ } \alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2} \qquad \text{.......(5)}$$

यह समीकरण (5) फोटॉन के प्रकीर्णन कोण ϕ तथा इलेक्ट्रॉन के प्रतिक्षिप्त कोण θ के मध्य सम्वंध को व्यक्त करता है।

समीकरण (4) से,

(i) अग्र प्रकीर्णन (forward scattering) की स्थिति में,

$$\phi = 0 \quad , \cot(\phi/2) = \infty \quad , \quad \theta = \pi/2$$

अत:आपाती X-किरण की दिशा से इलेक्ट्रॉन लम्बवत दिशा में प्रतिक्षिप्त होता है।

(ii) आपाती X-किरण के लम्बवत दिशा में प्रकीर्णन की स्थिति में.

$$\phi = 90^0 \quad , \cot(\phi/2) = 1 \quad , \quad \theta = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{m_0c^2}{h\nu + m_0c^2}$$

(iii) पश्चवर्ती प्रकीर्णन (backward scattering) की स्थिति में,

$$\phi = 180^0 \quad , \cot(\phi/2) = 0 \quad , \quad \theta = 0$$

अत: इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन आपाती X-किरण की दिशा में प्रतिक्षिप्त होता है|

(iii) प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन का वेग (Velocity of recoil electron)

कॉम्पटन प्रकीर्णन में ऊर्जा के संरक्षण के नियमानुसार

प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा $E = h(\nu - \nu') + m_0c^2$ ……………(5)

जहाँ m_0= विरामावस्था में इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, c = प्रकाश का वेग , $h\nu$ = आपाती फोटॉन की ऊर्जा तथा $h\nu'$ = प्रकीर्णित फोटॉन की ऊर्जा

यदि p प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन का संवेग है तो संवेग-ऊर्जा सम्बंध से,

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad \text{…………….(6)}$$

समीकरण (5) को समीकरण (6) में रखने पर,

$$p^2c^2 = h^2(\nu - \nu')^2 + 2hm_0c^2(\nu - \nu')$$

या
$$p^2c^2 = h^2\nu^2\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right)^2 + 2h\nu\, m_0c^2\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right)$$

माना $\alpha = h\nu/m_0c^2$

$$p^2 = m_0^2c^2\left[\alpha^2\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right)^2 + 2\alpha\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right)\right] \qquad \text{…………..(7)}$$

या
$$\frac{p^2}{m_0^2c^2} = \alpha\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right)\left[\alpha\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right) + 2\right]$$

कॉम्पटन विस्थापन सूत्र से,

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 + \alpha(1 - \cos\phi) = 1 + 2\alpha\sin^2(\phi/2)$$

या
$$\left(1 - \frac{\nu'}{\nu}\right) = 1 - \frac{1}{(1 + 2\alpha\sin^2(\phi/2))} = \frac{2\alpha\sin^2(\phi/2)}{(1 + 2\alpha\sin^2(\phi/2))}$$

यह मान समीकरण (7) में रखने पर,

$$\frac{p^2}{m_0^2c^2} = 4\alpha^2\sin^2(\phi/2)\left[\frac{1 + (2\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)}{\{1 + 2\alpha\sin^2(\phi/2)\}^2}\right] \qquad \text{………(8)}$$

यदि प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन का वेग v है तो प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन का संवेग

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{माना} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \frac{p^2}{m_0^2 c^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

समीकरण (8) से,

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 4\alpha^2 \sin^2(\phi/2)\left[\frac{1 + (2\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)}{\{1 + 2\alpha \sin^2(\phi/2)\}^2}\right]$$

या
$$\frac{1-\beta^2}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2} - 1 = \frac{\{1 + 2\alpha \sin^2(\phi/2)\}^2}{4\alpha^2 \sin^2(\phi/2)\{1 + (2\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)\}}$$

या
$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{[1 + 2(\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)]^2}{4\alpha^2 \sin^2(\phi/2)[1 + (2\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)]}$$

या
$$v = \beta c = 2c\alpha \sin(\phi/2)\frac{\sqrt{[1 + (2\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)]}}{[1 + 2(\alpha + \alpha^2)\sin^2(\phi/2)]} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

(i) अग्र प्रकीर्णन (forward scattering) की स्थिति में,

$$\phi = 0 \quad , \sin(\phi/2) = 0 \quad , \quad v = 0$$

अत:आपाती X-किरण की दिशा से प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन का वेग लगभग सून्य होता है।

(ii) आपाती X-किरण के लम्बवत दिशा में प्रकीर्णन की स्थिति में.

$$\phi = 90^0 \quad , \sin(\phi/2) = 1/\sqrt{2} \quad , \quad v = \frac{c\alpha\sqrt{(1 + \alpha + \alpha^2/2)}}{(1 + \alpha + \alpha^2)}$$

(iii) पश्चवर्ती प्रकीर्णन (backward scattering) की स्थिति में,

$$\phi = 180^0 \quad , \sin(\phi/2) = 1 \quad , \quad v = \frac{2c\alpha(1 + \alpha)}{(1 + 2\alpha + 2\alpha^2)} = v_{max}$$

अत: इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन अधिकतम वेग से प्रतिक्षिप्त होता है।

हल : कॉम्पटन प्रकीर्णन में कॉम्पटन विस्थापन

13

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi)$$

या

$$h = \frac{m_0 c \Delta\lambda}{(1 - \cos\phi)}$$

दिया है : $m_0 = 9.1 \text{ x } 10^{-31} \text{kg}$, $c = 3 \text{ x } 10^{8} \text{ms}^{-1}$

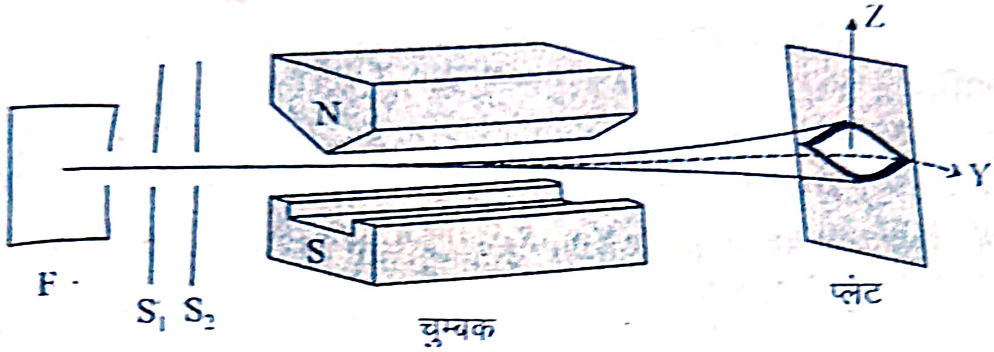
$\phi = 60^0$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\Delta\lambda = 0.121 \text{ Å} = 0.121 \text{ x} 10^{-10} m$

$$h = \frac{(9.1 \text{ x } 10^{-31}\text{kg})(3 \text{ x } 10^{8}\text{ms}^{-1})(0.121 \text{ x}10^{-10} m)}{(1 - 1/2)}$$

$$h = 6.61 \text{ x}10^{-34} \text{ J.s}$$

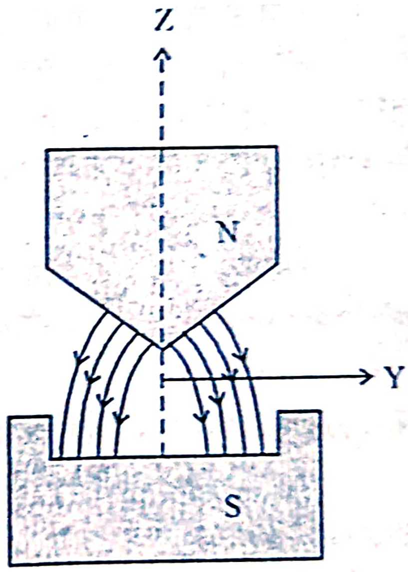
स्टर्न- गर्लेक प्रयोग (Stern-Gerlach experiment)

स्टर्न-गर्लेक के उपकरणों की प्रायोगिक व्यवस्था को चित्र (1) में दर्शाया गया है। स्टर्न-गर्लेक के प्रारम्भिक प्रयोगों में चाँदी के वाष्प (silver vapour) का उपयोग किया गया था। चाँदी धातु की एक भट्टी (oven) F में गर्म करके उच्च दाब पर उदासीन परमाणुओं को वाष्प रूप में प्राप्त करते हैं तथा इस चाँदी की वाष्प को कई रेखा छिद्रों S_1, S_2, S_3 ..... में से गुजारकर चाँदी के परमाणुओं का एक संकीर्ण (narrow) समांतर पुंज (parallel beam) प्राप्त किया जाता है। इस पुंज में परमाणुओं का वेग भट्टी के चाँदी कक्ष के ताप द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।



चित्र 1: स्टर्न–गर्लेक के उपकरणों की प्रायोगिक व्यवस्था

इस संकीर्ण समांतर परमाणु पुंज को एक विशेष आकृति में निर्मित दो चुम्बकीय ध्रुवों के मध्य से गुजारा जाता है। इन ध्रुवों के मध्य एक दिशा (माना z दिशा) में असमान चुम्बकीय क्षेत्र होता है। इस पुंज के गुजरने के बाद एक ठण्डी (cold) प्लेट पर आपतित कराया जाता है जहाँ ये उदासीन परमाणु प्लेट पर जमा (deposit) हो जाते हैं। प्लेट पर जमा हुये परमाणु प्लेट पर मोटी रेखा के रूप में प्रेक्षित होते है। मोटी रेखा पर जमा हुये परमाणुओं का घनत्व पुंज की तीव्रता तथा समय पर निर्भर करती है। परमाणुओं के पथ को वायु से अप्रभावित रखने के लिये सम्पूर्ण उपकरण को निर्वातित कक्ष (vacuum chamber) में रखा जाता है।



चित्र–2 : असमान चुम्बकीय क्षेत्र

इस प्रयोग के उपयोग में लाये गये चुम्बकीय ध्रुवों की आकृति चित्र (2) के अनुसार होने के कारण चुम्बकीय क्षेत्र xz तल के सममित होता है इस कारण चुम्बकीय क्षेत्र की प्रवणता $dB_Z/dy = 0$ माना जा सकता है तथा यदि किनारों के प्रभाव को नगण्य मानें तब dB_Z/dx को भी शून्य माना जा सकता है। अत: चुम्बकीय क्षेत्र की प्रवणता z दिशा में dB_Z/dz होगी इस कारण परमाणुवीय चुम्बकीय द्विध्रुव पर लगने बल

$$F_Z = M_Z \frac{\partial B_Z}{\partial z}$$

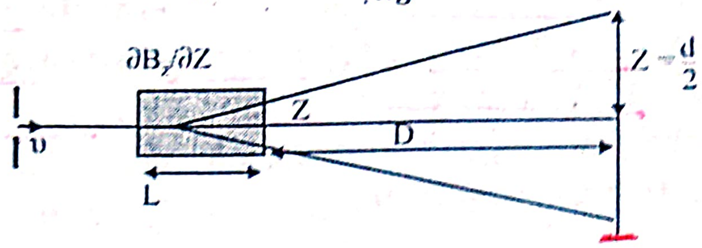
यदि असमान चुम्बकीय क्षेत्र की लम्बाई L तथा परमाणुओं का वेग v हो तब

परमाणुओं का त्वरण $$a = \frac{F}{m_{Ag}} = \frac{M_Z}{m_{Ag}}\left(\frac{\partial B_Z}{\partial z}\right)$$

तथा चुम्बकीय क्षेत्र में गतिशील परमाणुओं को लगा समय $t = L/v$

∴ परमाणु पुंज की z अक्ष की दिशा में विचलन,जहाँ पर परमाणु पुंज चुम्बक से बाहर आता है।

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{M_Z L^2}{2m_{Ag}v^2}\left(\frac{\partial B_Z}{\partial z}\right)$$



चित्र 3: स्टर्न–गर्लेक प्रयोग की रेखांकित व्यवस्था

चित्र की ज्यामितिय आकृति से,

$$Z = \frac{d}{2} = \left(D + \frac{L}{2}\right)\left(\frac{z}{L/2}\right)$$

जहाँ दो अनुरेखों के मध्य दूरी d तथा चुम्बक से प्लेट की दूरी D है।

∴ $$d = \frac{2M_z L(D + L/2)}{m_A v^2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

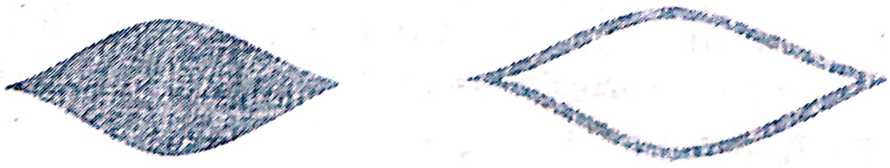
चिरसम्मत भौतिकी के अनुसार भट्टी से निकले चाँदी वाष्प से प्राप्त प्लेट पर आपतित परमाणु पुंज में परमाणुओं का कक्षीय चुम्बकीय आघूर्ण z अक्ष के सापेक्ष यादृच्छिक (arbitrary) रूप से झुके रहते है। इस कारण यह अनुमान लगाया जा सकता है कि परमाणुओं का कक्षीय चुम्बकीय आघूर्ण का z घटक M_Z का मान + M (जब $\vec{M}$,z अक्ष के समांतर) से - M(जब $\vec{M}$,z अक्ष के प्रति समांतर) तक यादृच्छिक रूप से होने चाहिये अर्थात

$$+M \geq M_Z. \geq -M$$

इसका अर्थ यह हुआ कि प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने के निशान की आकृति आपतित दिशा के ऊपर व नीचे दोनों तरफ समान रूप होनी चाहिये जैसा कि चित्र(4a) में दिखाया गया है।

स्टर्न-गर्लेक प्रयोग का परिणाम (Result of Stern-Gerlach experiment)

स्टर्न-गर्लेक के चाँदी के परमाणुओं के लिये किये गये प्रयोग में प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने से निर्मित अनुरेख (traces) की आकृति चित्र (4b) में दर्शायी जैसी प्राप्त होती है अर्थात प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने से निर्मित अनुरेख (traces) में दो सुस्पष्ट तथा पृथक रेखायें दिखाई देती है।



(a) (b)

चित्र 4: प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने से निर्मित अनुरेख की आकृति

प्लेट पर यह अनुरेख (4b) चिरसम्मत सिद्धांत से सहमति प्रकट नहीं करती है। अतः स्टर्न-गर्लेक के प्रयोग से प्राप्त परिणाम से यह निष्कर्ष निकलता है कि z अक्ष के अनुदिश चुम्बकीय

आघूर्ण का z घटक M_Z का क्वान्टीकरण होता है अर्थात चुम्बकीय आघूर्ण का z घटक M_Zके कुछ निश्चित मान ही होते है। इसे आकाशी क्वान्टीकरण (space quantization)कहते है।

परमाणु के चुम्बकीय आघूर्ण $\vec{M}$ के z घटक का मान $M_Z = eL_z/2m_e$ होता है। अत: M_Z के क्वान्टीकरण का अर्थ है L_z का क्वाटीकरण अर्थात

$$L_z = m_l\hbar$$

जहाँ m_l चुम्बकीय क्वान्टम संख्या कहलाती है तथा इसके मान $m_l = -l, -(l-1), -(l-2),$ ………….0,1, 2, 3, ………..$+l$ तक कुल मान $(2l+1)$ हो सकते हैं।अत: परमाणु के चुम्बकीय आघूर्ण $\vec{M}$ के z घटक M_Z के कुल मान $(2l+1)$ हो सकते हैं। इस कारण प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने से अनुरेख में $(2l+1)$ सुस्पष्ट तथा पृथक रेखायें दिखांई देनी चाहिए। उपरोक्त विवेचन से यह अर्थ निकलता है कि यदि $l = 0$ है तब प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने से निर्मित अनुरेख केवल एक रेखा की भांति दिखाई देनी चाहिए और यदि $l = 1$ है तब प्लेट पर परमाणुओं के एकत्रित होने से निर्मित अनुरेख में तीन रेखायें प्राप्त होनी चाहिये।

स्टर्न-गर्लेक के प्रयोग में चाँदी के परमाणुओं के एकत्रित होने से निर्मित अनुरेख पर केवल दो रेखायें प्राप्त होती है। यदि इस पर निम्न प्रतिबंध लगाया जाये तब

$$(2l+1) = 2$$

अर्थात

$$l = 1/2$$

l का यह अर्ध पूर्णांश मान क्वान्टम यांत्रिकी में क्वान्टभ्करण से प्राप्त प्रतिबन्ध, l 0.1, 2 , 3, …… पूर्णांक ही हो सकते हैं, से सहमति प्रकट नहीं करते हैं। अत: स्टर्न गर्लेक के प्रयोग से प्राप्त परिणाम की व्याख्या कक्षीय क्वान्टम संख्या l से नहीं की जा सकती। इसी प्रकार अन्य धातुओं जैसे ताँबा, पोटेशियम, सीजियम, हाइड्रोजन के लिए भी चॉदी से किये प्रयोग से प्राप्त परिणाम से सहमति प्रकट करते हैं। अत: इनके लिए भी स्टर्न-गर्लेक प्रयोग से प्राप्त परिणाम की व्याख्या कक्षीय क्वान्टम संख्या l से नहीं की जा सकती।

(6B) $M_z = 9.27 \times 10^{-24}\ JT^{-1}$

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिये कि पाउली मैट्रिक्स के लिये $\vec{\sigma}.\vec{\sigma} = 3$ होता है।

Prove that for a Pauli matrix $\vec{\sigma}.\vec{\sigma} = 3$.

हल: $\vec{\sigma}.\vec{\sigma} = (\hat{\imath}\sigma_x + \hat{\jmath}\sigma_y + \hat{k}\sigma_z).(\hat{\imath}\sigma_x + \hat{\jmath}\sigma_y + \hat{k}\sigma_z)$

$$\vec{\sigma}.\vec{\sigma} = \sigma_x\sigma_x + \sigma_y\sigma_y + \sigma_z\sigma_z$$

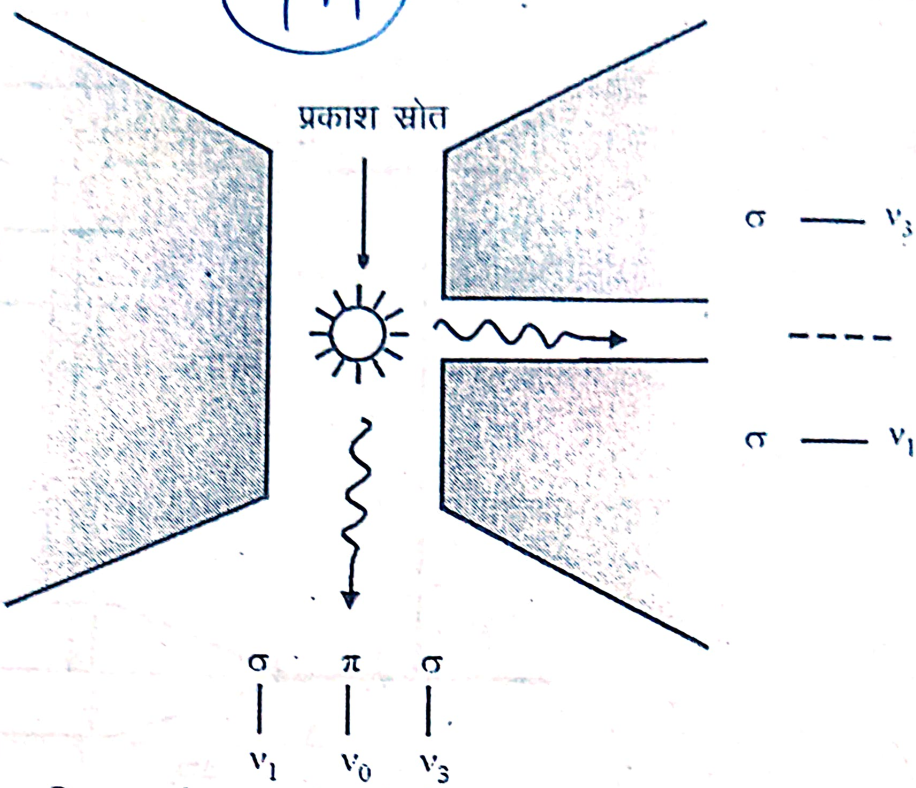
$$\vec{\sigma}.\vec{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\sigma}.\vec{\sigma} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

रेखाओं को जेमान सिगमा (σ) घटक कहते है।

4. जेमान प्रभाव (Zeeman Effect)

सन 1986 में जेमान (Zeeman) ने सर्वप्रथम यह प्रेक्षित किया कि यदि बहुवर्णी (multi-chromatic) प्रकाश को समांगी (homogeneous) चुम्बकीय क्षेत्र (strong magnetic field) में रखा जाये तो एक वर्णक्रम रेखा तीन वर्णक्रम रेखाओं में विपाटित हो जाती है। इस प्रभाव को सामान्य जेमान प्रभाव (normal Zeeman effect) कहते हैं। इसमें चुम्बकीय क्षेत्र के अनुदिश देखने पर जेमान के विपाटित सिगमा (σ)घटकों द्वारा प्राप्त दो वर्णक्रम रेखायें प्रेक्षित होते है जबकि चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत दिशा में देखने पर तीनों वर्णक्रम रेखायें प्रेक्षित होती है जैसा कि चित्र (1) में दर्शाया गया है।

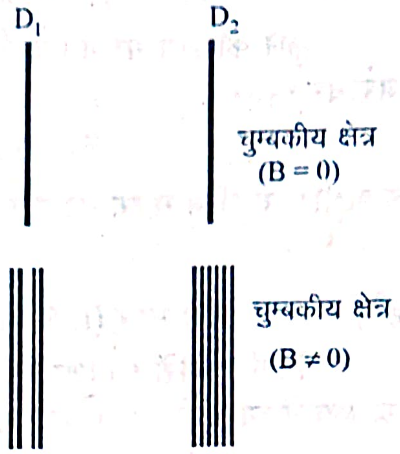


चित्र–1: जेमन प्रभाव को प्रेक्षित करने की विधि

सामान्य जेमान प्रभाव को प्रेक्षित करने के लिये तीव्र चुम्बकीय क्षेत्र $B = 2$ T (20 kilogauss) की आवश्यकता होती है। चुम्बकीय क्षेत्र $B = 2$ T द्वारा उत्पन्न जेमान विपाटन से ऊर्जा स्तरों में अंतर लगभग 1 cm^{-1} का प्राप्त होता है।

5. असाधारण जेमान प्रभाव (Anomalous Zeeman Effect)

जब किसी बहुवर्णी (multi-chromatic) प्रकाश स्रोत को समांगी (homogeneous) दुर्बल चुम्बकीय क्षेत्र(weak magnetic field) में रखते हैं तथा इससे उत्सर्जित प्रकाश को किसी अति सुग्राही वर्णक्रमदर्शी (highly sensitive spectroscope) से प्रेक्षित करते है तब मूल वर्णक्रम रेखा (basic spectral line) यदि तीन से भी अधिक घटकों के समूह में विपाटित हो जाती है तो इस प्रभाव को असाधारण जेमान प्रभाव (anomalous Zeeman effect) कहते है । यह प्रभाव परमाणु के इलेक्ट्रॉन में दोनों कक्षीय चुम्बकीय आघूर्ण$\vec{\mu_l}$ तथा प्रचक्रण चुम्बकीय आघूर्ण$\vec{\mu_s}$ के उपस्थिति से उत्पन्न होता है । सोडियम के D_1व D_2 वर्णक्रम रेखा के लिये असाधारण जेमान प्रभाव को चित्र (1) में दिखाया गया है ।



चित्र–1: सोडियम के D_1 व D_2 के वर्णक्रम रेखा के लिए असाधारण जेमन प्रभाव

असाधारण जेमान प्रभाव की व्याख्या (Explanation of anomalous Zeeman effect)

माना एक परमाणु बाह्य समांगी दुर्बल चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित है । चुम्बकीय क्षेत्र इतना दुर्वल लिया जाता है कि चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में ऊर्जा स्तर का जेमान विपाटन (Zeeman splitting) प्रचक्रण–कक्षीय विपाटन (spin-orbit splitting) की तुलना में अत्यल्प हो ।

सामान्यत: एक परमाणु में अनेक इलेक्ट्रॉन होते है और उन सभी इलेक्ट्रॉनों के कक्षीय तथा प्रचक्रण कोणीय संवेगों का सदिश योग जटिल प्राप्त होता है परंतु चुम्बकीय गुणों के लिये निम्न प्रकार की योगात्मक विधि का उपयोग करते हैं ।

सभी इलेक्ट्रॉनों (माना परमाणु में Z इलेक्ट्रॉन है ।) का परिणमित कक्षीय कोणीय संवेग उनके कक्षीय कोणीय संवेग के योग के बराबर होता है अर्थात

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{Z} l_i$$

अत: क्वान्टम यांत्रिकी के अनुसार कुल कक्षीय कोणीय संवेग का परिमाण

$$|\vec{L}| = \hbar\sqrt{L(L+1)}$$

जहाँ L का अधिकतम मान $L_{max} = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots \ldots = \sum_{i=1}^{Z} l_i$तथा न्यूनतम मान $L_{min} = 0$ होता है ।

इसी प्रकार सभी इलेक्ट्रॉनों के परिणमित प्रचक्रण कोणीय संवेग को उनके कुल प्रचक्रण कोणीय संवेग $\vec{S} = \sum_{i=1}^{Z} s_i$ के रूप में व्यक्त कर सकते है ।

∴ कुल प्रचक्रण कोणीय संवेग $|\vec{S}| = \hbar\sqrt{S(S+1)}$

जहाँ S का $S = \sum_{i=1}^{Z} s_i$से न्यूनतम मान 0 या 1/2 होता है । S का न्यूनतम मान इलेक्ट्रॉनों के संख्या क्रमश: सम या विषम पर निर्भर करता है । परमाणु में कुल प्रचक्रण क्वांटम संख्या S ज्ञात

करते समय यह ध्यान रखना आवश्यक होता है कि प्रचक्रण क्वान्टम संख्याओं का योग पाउली अपवर्जन नियम (Pauli exclusion principle) को संतुष्ट रखें।

कुल कोणीय संवेग $\vec{J}$ कक्षीय कोणीय संवेग $\vec{L}$ तथा प्रचक्रण कोणीय संवेग $\vec{S}$ के सदिश योग के बराबर होता है।

$$\therefore \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

कुल कक्षीय कोणीय संवेग का परिमाण

$$|J| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

जहाँ J के सम्भावित मान (L-S) से (L+S) तक 1 के अंतराल में होते है।

किसी विशिष्ट दिशा में (माना Z दिशा) के अनुदिश कुल कोणीय संवेग के z घटक को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$J_z = M_z\hbar$$

जहाँ M_z के सम्भावित $(2J+1)$ मान $-J$ से $+J$ तक 1 के अंतराल में होते हैं।

इस प्रकार के युग्मन जिसमें पृथक रूप से सभी इलेक्ट्रॉनों के लिये l तथा s का परिणमित मान ज्ञात कर कुल कोणीय संवेग का मान ज्ञात किया जाता है, L-S युग्मन (LS coupling or Russell-Saunders coupling) कहते हैं।

पिछले खण्ड (2) में यह देखा गया है कि कक्षीय कोणीय संवेग $\vec{l}$ तथा प्रचक्रण कोणीय संवेग $\vec{s}$ के संगत चुम्बकीय आघूर्ण क्रमश: $\vec{\mu_l}$ तथा $\vec{\mu_s}$ से सम्बंधित होते हैं उसी प्रकार कुल कोणीय संवेग $\vec{J}$ को भी संगत कुल चुम्बकीय आघूर्ण $\vec{\mu_J}$ से सम्बंध स्थापित किया जा सकता है। अत:

$$\vec{\mu_J} = -g_J\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{J}$$

कुल चुम्बकीय आघूर्ण $\vec{\mu_J}$ का परिमाण

$$|\vec{\mu_J}| = g_J\mu_B\sqrt{J(J+1)}$$

जहाँ g_J एक गुणक है जिसे लाँदे विपाटन गुणक कहते है। उपरोक्त प्रकार के युग्मन के लिये खण्ड (2) में दिये गये विधि से ज्ञात कर सकते हैं। अत:

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में परमाणु के इलेक्ट्रॉन L,S, J के मान विभिन्न होने के कारण सभी मूल तथा उत्तेजित ऊर्जा स्तरों का (2J+1) संख्या में विपाटन हो जाता है जिसके कारण अधिक संख्या में वर्णक्रम रेखायें प्रेक्षित होती है।

किन्ही दो विभिन्न L,S, J क्वान्टम संख्या वाले क्रमागत उपऊर्जा स्तरों (sub energy levels) के मध्य अंतराल $\Delta E = g_J\mu_B B$ होता है।

$(0.2\ m)$

$$\Delta E_r = 9.93 \times 10^{-25} J$$

उदाहरण 2: NO अणु का जड़त्व आघूर्ण 1.65 x 10^{-46}kg-m^2 है । इसके प्रथम तीन घूर्णी ऊर्जा स्तर की ऊर्जा ज्ञात कीजिये । 2025 2021

The moment of inertia of NO molecule is 1.65 × 10^{-46} kg-m^2. Determine the energy of its first three rotational energy levels.

हल: घूर्णी ऊर्जा स्तर के ऊर्जा मान

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\ j-s \qquad , I = 1.65 \times 10^{-46} kg-m^2$$

$$E_r = \frac{(1.054 \times 10^{-34}\ j-s)^2}{2 \times (1.65 \times 10^{-46} kg-m^2)} J(J+1)$$

$$E_r = J(J+1) 3.37 \times 10^{23} J = J(J+1) \frac{3.37 \times 10^{23} J}{1.6 \times 10^{-19} C}$$

$$E_r = J(J+1) x 2.1 \times 10^{-4} eV$$

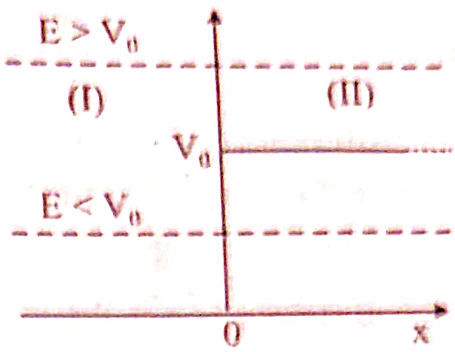
$J = 1$ के लिये $E_{r1} = 4.2 \times 10^{-4} eV$

$J = 2$ के लिये $E_{r2} = 12.6 \times 10^{-4} eV$

$J = 3$ के लिये $E_{r3} = 25.2 \times 10^{-4} eV$

1. विभव सीढ़ी (Potential Step)

किसी एक विमीय विभव क्षेत्र में एक तरफ विभव का मान शून्य तथा दूसरी तरफ परिमित विभव हो तो इस प्रकार के विभव क्षेत्र को विभव सीढ़ी कहते है जैसा कि चित्र (1) में दर्शाया गया है ।



चित्र–1 : विभव सीढ़ी

गणितीय रूप से इस विभव क्षेत्र को निम्न दो भागों में बांट सकते है ।

$V(x) = 0 \qquad x < 0 \qquad$ (क्षेत्र I)

$V(x) = V_0 \qquad x > 0 \qquad$ (क्षेत्र II)

माना कुल ऊर्जा E तथा m द्रव्यमान का एक कण बांयी ओर से x-अक्ष के समांतर गति करता हुआ एक नियत विभव क्षेत्र V_0 की परिसीमा पर टक्कर करता है जिसके लिये स्थितिज ऊर्जा वक्र चित्र (1) के अनुसार है । इसके दांयी ओर अनंत चौड़ाई वाला विभव रोधिका (potential barrier) है ।

क्वांटम यांत्रिकी के अनुसार बांयें ओर से आना वाला कण $x = 0$ पर विभव में आई असांतत्य (discontinuities) से प्रभावित होता है। इसे समझने के लिये कण की गति का वर्णन करने वाली क्वांटम यांत्रिकी की एक विमीय काल अनाश्रित श्रोडिंजर समीकरण का उपयोग करते है।

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = E\Psi(x,t)$$

चूंकि विभव समय पर निर्भर नहीं करता है इसलिये E कुल ऊर्जा वाले कण का तरंग फलन निम्न होगा – ....(1)

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{-jEt}$$

जहाँ $\Psi(x)$ निम्न काल अनाश्रित श्रोडिंजर समीकरण (time independent Schrodinger equation) का हल हैं – ....(2)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

श्रोडिंजर समीकरण के हल (Solutions of Schrodinger equation)

समीकरण (2) का हल निम्न दो परिस्थितियों (i) $E < V_0$ तथा (ii) $E > V_0$ के लिए अलग-अलग प्राप्त करते हैं। 4A

(i) जब $E < V_0$ है:

क्षेत्र I $(x < 0)$ में विभव $V(x) = 0$ है इसलिये समीकरण (2) से श्रोडिंजर समीकरण

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} = E\psi_I(x)$$

या
$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_I(x) = 0$$

या
$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + k^2\psi_I(x) = 0 \qquad \text{.........(3)}$$

माना
$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2 \qquad \text{.........(4)}$$

समीकरण (3) क्षेत्र I ($x < 0$) में एक ऐसे मुक्त कण की गति का वर्णन करता है जिसका तरंग संचरण नियतांक k है । अत: इन समीकरणों के व्यापक हल निम्न होंगे-

$$\psi_I(x) = A\,e^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad \text{क्षेत्र I } (x < 0) \quad \text{...............(5)}$$

जहाँ A , B अज्ञात नियतांक हैं ।

माना बांयी ओर से $+x$ अक्ष के अनुदिश विभव दिवार $x = 0$ पर कण आपतित होता है । अत: क्षेत्र I ($x < 0$) में गति कर रही कण के संगत आपाती तरंग का समीकरण Ae^{ikx} तथा विभव दिवार से परावर्तित तरंग का समीकरण Be^{-ikx} दोनों ही सम्भव है ।

क्षेत्र II ($x > 0$) में विभव $V(x) = V_0$ है इसलिये समीकरण (2) से श्रोडिंजर समीकरण

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + V_0\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x)$$

या
$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi_{II}(x) = 0$$

या
$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} - \alpha^2\,\psi_{II}(x) = 0 \qquad \text{.....(6)}$$

माना
$$\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} = \alpha^2 \qquad \text{.....(7)}$$

जहाँ α एक वास्तविक नियतांक है ।

समीकरण (7) क्षेत्र II ($x > a$) में एक ऐसे कण की गति का वर्णन करता है जिसकी गति के लिये इस समीकरण का व्यापक हल निम्न होगा-

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} \qquad \text{...............(8)}$$

जहाँ C व D अज्ञात नियतांक हैं ।

नियतांको A, B, C तथा D का निर्धारण तरंग फलन पर परिसीमा तथा सांतत्य प्रतिबंधों (boundary and continuity conditions) द्वारा किया जाता है । इन प्रतिबंधों के अनुसार x के सब मानों के लिये तरंग फलन $\psi(x)$ तथा इसका प्रथम अवकलज $d\psi(x)/dx$ परिमित (finite) तथा सतत (continuous) होने चाहिये । समीकरण (8) में यदि $C \neq 0$ हो तब जैसे-जैसे x का मान बढेगा, $Ce^{\alpha x}$ का मान भी बढेगा अर्थात $x \to \infty$ के लिये $Ce^{\alpha x} \to \infty$ हो जायेगा । यह वांछित नहीं है । अत: तरंग फलन $\psi(x)$ पर प्रतिबंध का पालन करने के लिये यह

आवश्यक है कि C = 0 लिया जाये । अत: क्षेत्र II (x > 0) के लिये तरंग फलन $\psi_{II}(x) = De^{-\alpha x}$ होना चाहिये । अत: $E < V_0$ के लिये

$$\psi_I(x) = A\,e^{jkx} + Be^{-jkx} \qquad \text{क्षेत्र I } (x < 0) \qquad \ldots\ldots(9)$$

$$\psi_{II}(x) = De^{-\alpha x} \qquad \text{क्षेत्र II } (x > 0) \qquad \ldots\ldots(10)$$

क्षेत्रों I, II के लिये तरंग फलनों के आयाम नियतांकों A, B तथा D का निर्धारण तरंग फलन पर परिसीमा तथा सांतत्य प्रतिबंधों से करते है ।

सांतत्य प्रतिबंध के अनुसार x = 0 पर समीकरण (9) व (10) के तरंग फलन व इनके अवकलज सतत होने चाहिये अर्थात

$$\psi_I(x = 0) = \psi_{II}(x = 0)$$

$$\left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}$$

उपरोक्त प्रतिबंधों को समीकरण (9) व (10) में उपयोग करने पर,

$$A + B = D \qquad \ldots\ldots\ldots(11)$$

$$jk(A - B) = -\alpha D \qquad \ldots\ldots\ldots(12)$$

समीकरण (11) व (12) को हल करने पर,

$$D = \frac{2k}{k + j\alpha}A \qquad \ldots\ldots\ldots(13)$$

$$B = \frac{k - j\alpha}{k + j\alpha}A \qquad \ldots\ldots\ldots(14)$$

इनका उपयोग समीकरण (9) व (10) में करने पर,

$$\psi_I(x) = A\left(e^{jkx} + \frac{k - j\alpha}{k + j\alpha}e^{-jkx}\right) \qquad \text{क्षेत्र I } (x < 0) \qquad \ldots\ldots(15)$$

$$\psi_{II}(x) = A\left(\frac{2k}{k + j\alpha}\right)e^{-\alpha x} \qquad \text{क्षेत्र II } (x > 0) \qquad \ldots\ldots(16)$$

प्रायिकता धारा घनत्व (Probability current density)

एक कण पुंज क्षेत्र (I) में से गति करता हुआ विभव दिवार को पार कर क्षेत्र (II) में पहुँचता है । अत: इस अवस्था में प्रायिकता धारा घनत्व के तीन भाग होते है । आपतित प्रायिकता धारा घनत्व J_I, परावर्तित प्रायिकता धारा घनत्व J_R तथा पारगमित धारा घनत्व J_T। प्रायिकता धारा घनत्व को निम्न सम्बंध से परिभाषित किया जाता है ।

$$J = \left[\Psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{jm}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x)\right] \quad \text{.......(17)}$$

इसमें समीकरण (15) व (16) को रखकर हल करने पर,

$$J_I = [A]^2\left(\frac{\hbar k}{m}\right) = [A]^2 v \quad \text{.......(18a)}$$

$$J_R = -|B|^2\left(\frac{\hbar k}{m}\right) = |B|^2 v \quad \text{.........(18b)}$$

$$J_T = 0 \quad \text{.........(18c)}$$

जहाँ क्षेत्र (I) में v कण का वेग है।

परावर्तन गुणांक तथा पारगमन गुणांक (Reflection coefficient and Transmission coefficient)

परावर्तित प्रायिकता धारा घनत्व तथा आपतित प्रायिकता धारा घनत्व के अनुपात का निरपेक्ष मान (absolute value) **परावर्तन गुणांक (reflection coefficient)** R कहलाता है इसलिये

$$\text{परावर्तन गुणांक } R = \left|\frac{J_R}{J_I}\right| = \frac{k|B|^2}{k|A|^2}$$

$$\text{परावर्तन गुणांक } R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

इसमें समीकरण (14) रखने पर,

$$R = \left|\frac{k - j\alpha}{k + j\alpha}\right|^2 = 1 \quad \text{......(19)}$$

पारगमित प्रायिकता धारा घनत्व तथा आपतित प्रायिकता धारा घनत्व के अनुपात का निरपेक्ष मान (absolute value) **पारगमन गुणांक (transmission coefficient)** T कहलाता है इसलिये

$$\text{पारगमन गुणांक } T = \left|\frac{J_T}{J_I}\right| = 0 \quad \text{........(20)}$$

अत: जब कण की कुल ऊर्जा विभव दिवार के विभव से कम होती है तब कण पुंज 100% परावर्तित हो जाता है तथा पारगमन शून्य होता है।