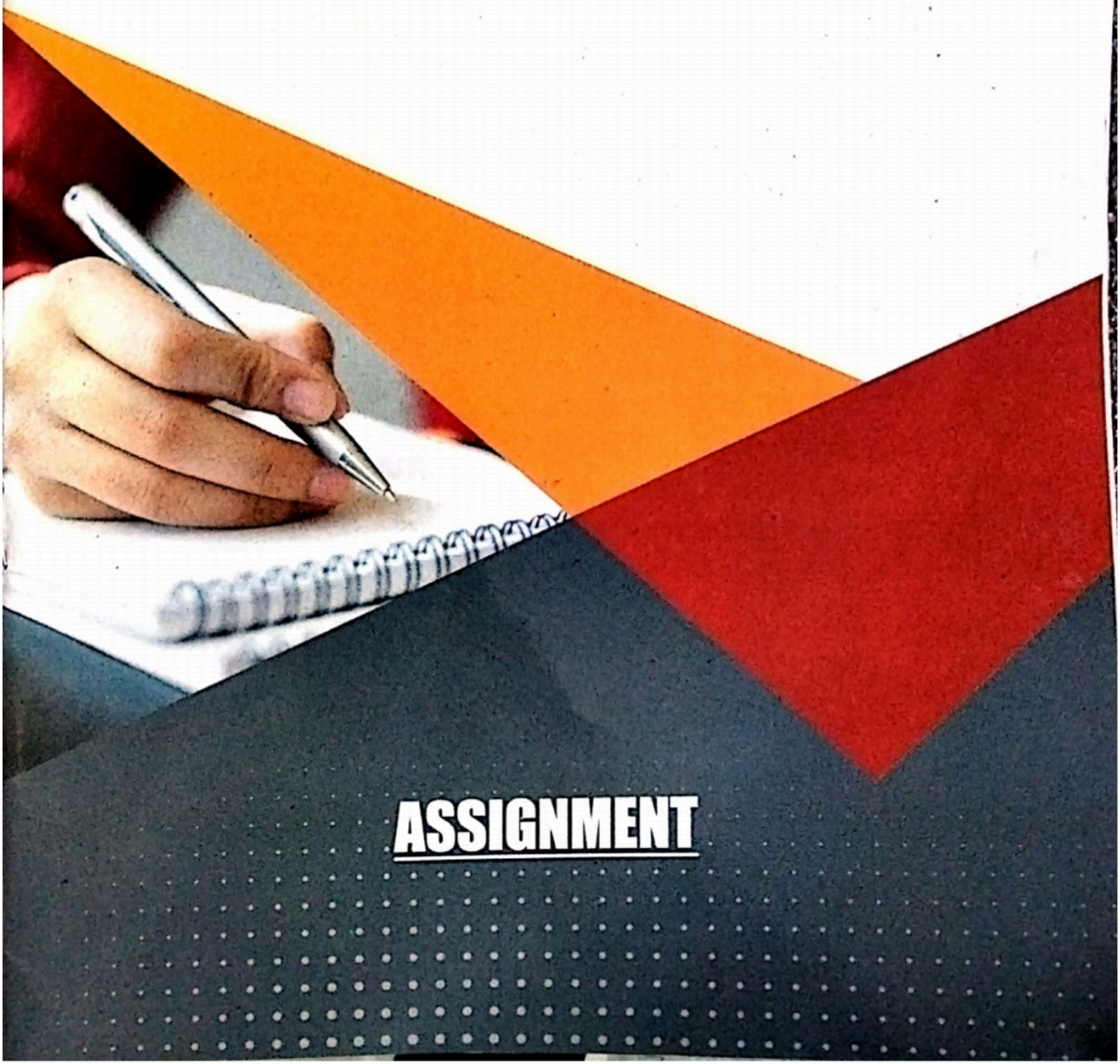
R.K.
GROUP OF COLLEGE

Behind Kalwar Police Station, Kalwar, Jaipur (Raj.)



ASSIGNMENT

Scanned with CamScanner

§8.13 टिप्पणी कई लेखक उपरोक्त उपप्रमेय को स्वार्ज प्रमेयिका मानते हैं।

§8.11 दृष्टान्तीय उदाहरण (Illustrative Examples)

§8.11.1. उदाहरण : फलनों e^z तथा $\sin z$ का $z = 0$ के सामीप्य में टेलर श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक श्रेणी के अभिसारी होने का क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

Expand e^z and $\sin z$ in a Taylor's series about $z = 0$ and determine the region of convergence in each case. [Raj. (B.Sc.) 2008, 12]

हल : (i) माना कि $f(z) = e^z$ तो $f^{(n)}(z) = e^z$

अत: $f(0) = 1, f^{(n)}(0) = 1, n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

चूँकि e^z, z के प्रत्येक मान के लिए विश्लेषिक फलन है। अत:

$$f(z) = e^z = f(0) + z f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \ldots\ldots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$ जहाँ $|z| < \infty$ श्रेणी का अभिसरण क्षेत्र है।

(ii) माना कि $f(z) = \sin z$ तो $f^{(n)}(z) = \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad f(0) = 0, f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 1, 2, 3, \ldots..$

स्पष्ट है कि $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n+1}$ तथा $f^{(2n)}(0) = 0$

चूँकि z के प्रत्येक मान के लिए $\sin z$ विश्लेषिक फलन है अतः टेलर प्रमेय से,

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \frac{z^3}{3!} f'''(0) + \ldots..$$

$$+ \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{2n-1}(0) + \ldots..$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.. + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots..$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$ जहाँ $|z| < \infty$ श्रेणी का अभिसरण क्षेत्र है।

§8.11.2 उदाहरण : बिन्दु $z = (\pi/2)$ के सापेक्ष में $\cos z$ का प्रसार कीजिए।

7.8. सम्मिश्र फलनों के लिये समाकलन का मूल प्रमेय (Fundamental theorem of integral calculus for complex functions) :

प्रकथन : माना एकशः सम्बद्ध प्रान्त G में f (z) एक एकमानी विश्लेषिक फलन है। यदि a, b ∈ G तब

$$\int_a^b f(z)\,dz = \phi(b) - \phi(a)$$

यहाँ $\phi(z)$, f (z) का अनिश्चित समाकल है।

Statement : *Let $f(z)$ be a single valued analytic function in a simple connected domain G. If a, b ∈ G, then*

$\int_a^b f(z)\,dz = \phi(b) - \phi(a)$, *where $\phi(z)$ is an indefinite integral of $f(z)$.*

[Raj. 2000, 02 (S), 05 (S), 08, 14; Sikar 18; Ajmer (M.Sc.) 09 (Old); (B.Sc.) 10]

उपपत्ति : माना $$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt \qquad \ldots..(7.8.5)$$

तब प्रमेय 7.8.3 से, $f(z)$ का अनिश्चित समाकल $\phi(z)$ हो, तो

$$\phi(z) = F(z) + k, \qquad \text{जहाँ } k \text{ अचर है।} \qquad \ldots..(7.8.6)$$

(7.8.6) से, $\phi(b) = F(b) + k$ एवं $\phi(a) = F(a) + k$

अतः $\phi(b) - \phi(a) = \{F(b) + k\} - \{F(a) + k\}$

या $\phi(b) - \phi(a) = F(b) - F(a)$

अब समीकरण (7.8.5) से,

$$F(b) = \int_{z_0}^{b} f(t)\,dt \text{ तथा } F(a) = \int_{z_0}^{a} f(t)\,dt$$

अब
$$F(b) - F(a) = \int_{z_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{z_0}^{a} f(t)\,dt$$
$$= \int_{z_0}^{b} f(t)\,dt + \int_{a}^{z_0} f(t)\,dt$$
$$= \int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(z)\,dz$$

या
$$\phi(b) - \phi(a) = \int_{a}^{b} f(z)\,dz$$

प्रत्येक $z \in G$ [illegible]

$$\phi(z) = \int f(z)\, dz \qquad \ldots\ldots(7.8.1)$$

से व्यक्त करते हैं।

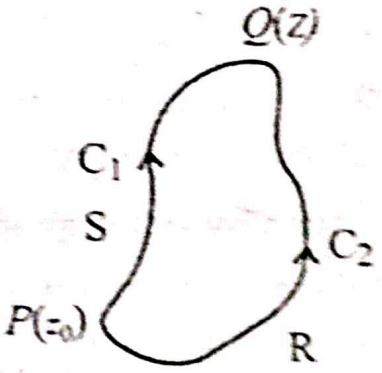
चूँकि अचर संख्या का अवकलज शून्य होता है अत: दो निश्चित समाकलों में अचर संख्या का अन्तर हो सकता है। इसी कारण समीकरण (7.8.1) के दांई ओर अचरांक C जोड़ दिया जाता है।

7.8.2 प्रमेय : यदि एकश: सम्बद्ध प्रदेश G में f (z) विश्लेषिक फलन हो, तो अनिश्चित समाकल $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$, G में बिन्दुओं z_0 एवं z को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होता है।

If $f(z)$ is analytic in a simply connected domain G, then the indefinite integral $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$, is independent of the path joining z_0 with z in G.

[Raj. 2002, 04, 07, 13; Ajmer (B.Sc.) 08; Jodhpur 13]

उपपत्ति : माना कि z_0 एक स्थिर बिन्दु है तथा प्रदेश G में z कोई दूसरा बिन्दु है। पुन: मान कि इस प्रदेश G में z_0 तथा z को मिलाने वाले कोई दो वक्र C_1 तथा C_2 हैं। इनमें दो वक्रों C_1 तथा C_2 को एक साथ लेने पर एक सरल संवृत कंटूर γ प्राप्त होगा जिसके अन्दर तथा ऊपर $f(z)$ विश्लेषिक फलन है।



चित्र 7.6

अत: कौशी प्रमेय से

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

प्रत्येक $z \in G$ के लिए $\phi'(z) = f(z)$ तथा इसे संकेत

$$\phi(z) = \int f(z)\, dz \qquad \ldots\ldots(7.8.1)$$

से व्यक्त करते हैं।

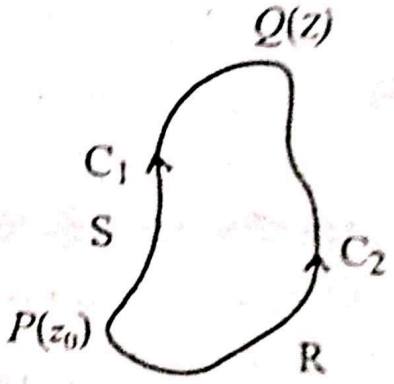
चूँकि अचर संख्या का अवकलज शून्य होता है अतः दो निश्चित समाकलों में अचर संख्या का अन्तर हो सकता है। इसी कारण समीकरण (7.8.1) के दाईं ओर अचरांक C जोड़ दिया जाता है।

7.8.2 प्रमेय : यदि एकशः सम्बन्ध प्रदेश G में f (z) विश्लेषिक फलन हो, तो अनिश्चित समाकल $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$, G में बिन्दुओं z_0 एवं z को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होता है।

If $f(z)$ is analytic in a simply connected domain G, then the indefinite integral $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$, is independent of the path joining z_0 with z in G.

[Raj. 2002, 04, 07, 13; Ajmer (B.Sc.) 08; Jodhpur 13]

उपपत्ति : माना कि z_0 एक स्थिर बिन्दु है तथा प्रदेश G में z कोई दूसरा बिन्दु है। पुनः माना कि इस प्रदेश G में z_0 तथा z को मिलाने वाले कोई दो वक्र C_1 तथा C_2 हैं। इनमें दो वक्रों C_1 तथा C_2 को एक साथ लेने पर एक सरल संवृत कंटूर γ प्राप्त होगा जिसके अन्दर तथा ऊपर $f(z)$ विश्लेषिक फलन है।



चित्र 7.6

अतः कौशी प्रमेय से

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

जहाँ वक्र γ के अनुदिश समाकल वामावर्त दिशा में है।

परन्तु
$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz$$
$$= \int_{PRQ} f(z)dz - \int_{PSQ} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \qquad \ldots(7.1)$$

अतः z_0 तथा z को मिलाने वाले किसी वक्र के अनुदिश $f(z)$ का समाकल समान है। अतः यह समाकल केवल बिन्दुओं z_0 एवं z पर निर्भर करता है। फलतः समाकल $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ बिन्दुओं z_0 तथा z को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होगा।

हम (7.8.2) को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

यहाँ z_0 को निम्न सीमा तथा z को समाकल की ऊपरी सीमा कहते हैं। यदि समाकल की निम्न सीमा z_0 को स्थिर कर दिया जाये तथा ऊपरी सीमा में परिवर्तन कर जाये तो हमें एकमानीय फलन

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \quad (z_0, z \in G) \qquad \ldots(7.8.3)$$

प्राप्त होगा। अब हम सिद्ध करेंगे कि $\phi(z)$ जिसका अवकलज $f(z)$ है स्वयं G में विश्लेषिक फलन होता है।

जहाँ वक्र γ के अनुदिश समाकल वामावर्त दिशा में है।

परन्तु
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz$$
$$= \int_{PRQ} f(z)\,dz - \int_{PSQ} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \qquad \ldots\ldots(7.8.2)$$

अतः z_0 तथा z को मिलाने वाले किसी वक्र के अनुदिश $f(z)$ का समाकल समान है। अतः यह समाकल केवल बिन्दुओं z_0 एवं z पर निर्भर करता है। फलतः समाकल $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ बिन्दुओं z_0 तथा z को मिलाने वाले पथ से स्वतंत्र होगा।

हम (7.8.2) को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$$

यहाँ z_0 को निम्न सीमा तथा z को समाकल की ऊपरी सीमा कहते हैं। यदि समाकल की निम्न सीमा z_0 को स्थिर कर दिया जाये तथा ऊपरी सीमा में परिवर्तन करा जाये तो हमें एकमानीय फलन

$$\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi \quad (z_0, z \in G) \qquad \ldots\ldots(7.8.3)$$

प्राप्त होगा। अब हम सिद्ध करेंगे कि $\phi(z)$ जिसका अवकलज $f(z)$ है स्वयं G में विश्लेषिक फलन होता है।

2019 **7.8.3. प्रमेय : (Theorem) : एकशः सम्बद्ध प्रान्त G में फलन f (z) के लिये अनिश्चित समाकल रखने की एक आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध फलन f (z) का G में विश्लेषिक होना है। पुनः किन्हीं दो अनिश्चित समाकलों में एक अचर का अन्तर होता है।**

A necessary and sufficient condition for a function f (z) to possess an indefinite integral in a simply connected domain G is that the function f(z) is analytic in G. Furth