R.K.
GROUP OF COLLEGE

Behind Kalwar Police Station, Kalwar, Jaipur (Raj.)

ASSIGNMENT

1. यदि वक्र $y = ae^{x/a}$ के किसी बिन्दु की अक्षों के समान्तर वक्रता जीवाएं C_x तथा C_y हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{C_x^2} + \frac{1}{C_y^2} = \frac{1}{2aC_x}$$

2. यदि $V = f(x-y, y-z, z-x)$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

3. $\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\, dx$ का मान ज्ञात करो।

4. ऐस्ट्राइड को $x = a$ अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित क्रांतिपी ठोस का आयतन ज्ञात करो।

Q.1 यदि वक्र $y = ae^{x/a}$ के किसी बिन्दु की अक्षों के समान्तर वक्रता - जीवाएँ C_x तथा C_y हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{C_x^2} + \frac{1}{C_y^2} = \frac{1}{2aC_x}$$

Soln:- यहाँ

$$y = ae^{x/a}$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = e^{x/a}$$

तथा

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} e^{x/a}$$

अब X- अक्ष के समान्तर वक्रता - जीवा (C_x)

$$= 2\rho \sin\psi$$

$$= \frac{2y_1(1+y_1^2)}{y_2}$$

$$= \frac{2e^{x/a}(1+e^{2x/a})}{\frac{e^{x/a}}{a}}$$

$$= 2a\left(1 + e^{2x/a}\right)$$

y- अक्ष के समान्तर वक्रता जीवा $(C_y) =$

$$= 2\rho\cos\psi$$

$$= 2(1 + y_1^2)$$

$$= \frac{2\left(1 + e^{2x/a}\right)}{\frac{e^{x/a}}{a}}$$

$$= \frac{2a\left(1 + e^{2x/a}\right)}{e^{x/a}}$$

अतः

$$\frac{1}{c_x^2} + \frac{1}{c_y^2} = \frac{1}{4a^2\left(1+e^{2x/a}\right)^2} + \frac{e^{2x/a}}{4a^2\left(1+e^{2x/a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2ac_x}$$

अतः

$$\boxed{\frac{1}{c_x^2} + \frac{1}{c_y^2} = \frac{1}{2ac_x}}$$

Q.2 यदि $V = f(x-y, y-z, z-x)$ है तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Sol:- माना

$$x-y = t_1, \quad y-z = t_2, \quad z-x = t_3$$

अब

$$V = f(t_1, t_2, t_3),$$

जहाँ t_1, t_2, t_3, प्रत्येक x, y, तथा z के फलन है।

$\therefore$ $$V = f(t_1, t_2, t_3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t_3}\frac{\partial t_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t_1}(1) + \frac{\partial V}{\partial t_2}(0) + \frac{\partial V}{\partial t_3}(-1)$$

पुनः $t_1 = x - y$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_1}{\partial x} = 1$$

$t_2 = y - z$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial x} = 0$$

$t_3 = z - x$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_3}{\partial x} = -1$$

अतः

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t_1} - \frac{\partial V}{\partial t_3} \quad -(1)$$

इसी प्रकार

~~$V = t_1$~~

$V = f(t_1, t_2, t_3)$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial t_3}\frac{\partial t_3}{\partial y}$$

यहाँ

$t_1 = x - y$

$\Rightarrow \frac{\partial t_1}{\partial y} = -1$

$t_2 = y - z$

$\Rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial y} = 1$

$t_3 = z - x$

$\Rightarrow \frac{\partial t_3}{\partial y} = 0$

अतः

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial t_1}(-1) + \frac{\partial V}{\partial t_2}(1) + \frac{\partial V}{\partial t_3}(0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial t_1} + \frac{\partial V}{\partial t_2} \quad \text{— (2)}$$

इसी प्रकार

$$V = f(t_1, t_2, t_3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t_3}\frac{\partial t_3}{\partial z}$$

चूँकि

$$t_1 = x - y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_1}{\partial z} = 0$$

$$t_2 = y - z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_2}{\partial z} = -1$$

$$t_3 = z - x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_3}{\partial z} = 1$$

अतः

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t_1}(0) + \frac{\partial V}{\partial t_2}(-1) + \frac{\partial V}{\partial t_3}(1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial t_2} + \frac{\partial V}{\partial t_3} \quad -(3)$$

समी० (1), (2) व (3) को जोड़ने पर

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t_1} - \frac{\partial V}{\partial t_3} - \frac{\partial V}{\partial t_1}$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial t_2} - \frac{\partial V}{\partial t_2} + \frac{\partial V}{\partial t_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0}$$

Q.3 $\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ?

Sol^n :-

$$\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x^{24})^{24}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^8}{(1+x)^{24}}\,dx - \int_0^\infty \frac{x^{14}}{(1+x)^{24}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{(1+x)^{9+15}} - \int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{(1+x)^{9+15}}\,dx$$

$\because \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = B(m,n)$

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = B(n,m)$$

$\therefore$

$$B(m,n) = B(n,m)$$

अत:

$$= \int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{(1+x)^{9+15}}\,dx - \int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{(1+x)^{9+15}}\,dx$$

$$= B(9,15) - B(15,9)$$

$\because$ $B(9,15) = B(15,9)$

अत:

$$= B(9,15) + B(15,9)$$

$$= 0$$

अत:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\,dx = 0$$

Q.4 ऐस्ट्राइड को x-अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित् तर्कुरूपी ठोस का आयतन ज्ञात करो?

Sol:- ऐस्ट्राइड के समीकरण से

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \quad \text{---(1)}$$

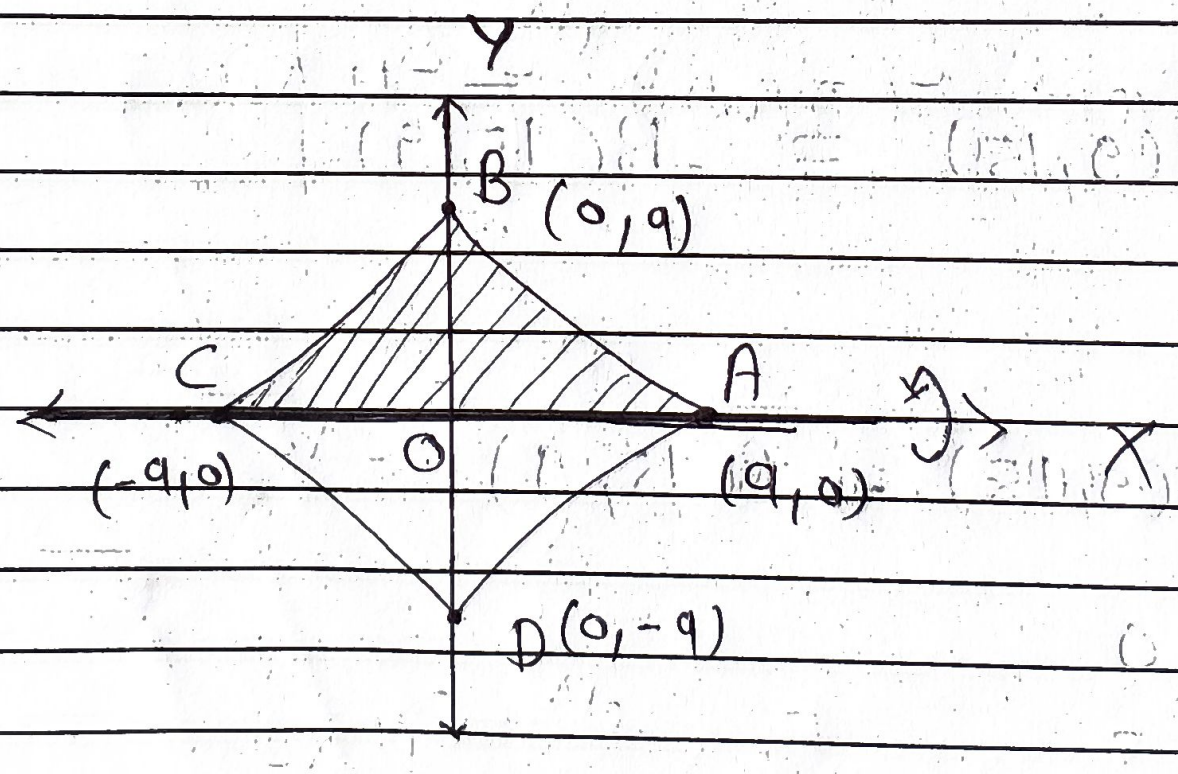

Fig: (A)

चूँकि वक्र घूर्णन अक्ष (x-अक्ष) के सापेक्ष सममित है अतः वक्र ABCDA द्वारा जनित गोस का आयतन वही होगा तो क्षेत्रफल ABCA के घूर्णन द्वारा जनित गोस का आयतन है।

पुनः चूँकि वक्र y-अक्ष के सापेक्ष भी सममित है अतः अभीष्ट आयतन क्षेत्रफल ABOA के घूर्णन से जनित आयतन का दुगुना होगा। क्षेत्रफल ABOA, चाप AB तथा कोटियों $x=0$ तथा $x=a$ से घिरा हुआ है।

$$\therefore \text{आयतन} = 2\int_0^a \pi y^2 dx$$

$$= 2\pi\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx$$

(समी० (1) से)

अब

माना कि

$$x = a\sin^3\theta$$

तब

तब

$$dx = 3a\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

तथा

जब $x = 0$, $\theta = 0$

तथा

जब $x = a$, $\theta = \pi/2$

$\therefore$ अभीष्ट आयतन $= 2\pi \int_0^{\pi/2} (a^{2/3} - a^{2/3}\sin^2\theta)^3 \cdot 3a\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$

$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^3 \cdot \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$

$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^3 \cdot \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$

$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6\theta \cdot \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$

$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^7\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta$

$$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^7\theta \, d\theta$$

यहाँ $\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{\lfloor \frac{m+1}{2} \lfloor \frac{n+1}{2}}{2 \lfloor \frac{m+n+2}{2}}$

के प्रयोग से

$$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^7\theta \, d\theta$$

$$= 6\pi a^3 \frac{\lfloor 3/2 \lfloor 4}{2 \lfloor 11/2}$$

$$= 6\pi a^3 \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot 3.2.1}{2 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}$$

$$= 6\pi a^3 \times \frac{16}{315}$$

$$= \frac{64\pi a^3 \times 16}{315}$$

$$= \frac{2\pi a^3 \times 16}{105}$$

$$= \frac{32\pi a^3}{105}$$

अतः ऐस्ट्राइड को x-अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित तकुरूपी ठोस का आयतन $\frac{32\pi a^3}{105}$ होगा।