R.K.
GROUP OF COLLEGE

Behind Kalwar Police Station, Kalwar, Jaipur (Raj.)

ASSIGNMENT

प्रमेय (Theorem) 6. किसी ग्रुप G के दो उपग्रुपों का संघ एक उपसमूह है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अंतर्विष्ट (निहित) है (*The union of two subgroups of a group G is a subgroup iff one is contained in the other.*)

[Udaipur 04, 07, 12, 14; Raj. 04, 09, 14; Kota 05, 08; Ajmer 09]

उपपत्ति (Proof) : प्रतिबन्ध की आवश्यकता—माना कि H_1 तथा H_2, ग्रुप G के कोई दो उपग्रुप हैं। माना $H_1 \subseteq H_2$ या $H_2 \subseteq H_1$ तब

$H_1 \cup H_2 = H_2$ या $H_1 \Rightarrow H_1 \cup H_2$ भी G का उपग्रुप है।

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : माना H_1 तथा H_2, G के उपग्रुप हैं तथा $H_1 \cup H_2$ भी G के उपग्रुप हैं; तब हमें सिद्ध करना है कि $H_1 \subseteq H_2$ या $H_2 \subseteq H_1$.

यदि सम्भव है तो माना $H_1 \not\subseteq H_2$ तथा $H_2 \not\subseteq H_1$

अब $\quad H_1 \not\subseteq H_2 \Rightarrow \exists\, a \in H_1 \wedge a \notin H_2$

इसी प्रकार $\quad H_2 \not\subseteq H_1 \Rightarrow \exists\, b \in H_2 \wedge b \notin H_1$

परन्तु $\quad a \in H_1 \Rightarrow a \in H_1 \cup H_2,$

$\quad b \in H_2 \Rightarrow b \in H_1 \cup H_2.$

साथ ही हमने यह माना है कि $H_1 \cup H_2$ एक उपग्रुप है, इसलिए

$$a \in H_1 \cup H_2, b \in H_1 \cup H_2 \Rightarrow ab \in H_1 \cup H_2$$

परन्तु $\quad ab \in H_1 \cup H_2 \Rightarrow ab \in H_1$ या $ab \in H_2$

अब यदि $ab \in H_1$, तथा H_1 एक उपग्रुप होने के कारण

$$\begin{aligned} a \in H_1, ab \in H_1 &\Rightarrow a^{-1} \in H_1, ab \in H_1 \\ &\Rightarrow a^{-1}(ab) \in H_1 \\ &\Rightarrow (a^{-1}a)b \in H_1 = eb \in H_1 \\ &\Rightarrow b \in H_1 \end{aligned}$$

जो उपरोक्त का विरोधाभास (contradiction) है। साथ ही यदि $ab \in H_2$, तथा H_2 एक उपग्रुप है

$$\begin{aligned} ab \in H_2, b \in H_2 &\Rightarrow (ab)(b^{-1}) \in H_2 \\ &\Rightarrow a(bb^{-1}) \in H_2 \\ &\Rightarrow ae = a \in H_2 \end{aligned}$$

जो कि उपरोक्त का पुनः विरोधाभास (contradiction) है।

चूंकि विरोधाभास निम्न को मानने से हुआ है

$H_1 \not\subseteq H_2$, तथा $H_2 \not\subseteq H_1$

इसलिए $\quad H_1 \subseteq H_2 \quad$ या $H_2 \subseteq H_1$.

§6·5 विभाग ग्रुप पर प्रमेय (Theorems on Quotient Group)

प्रमेय (Theorem) 1 : एक आबेली ग्रुप का प्रत्येक अवशेष वर्ग (खण्ड) ग्रुप आबेली होता है। परन्तु इसका विलोम आवश्य नहीं की सत्य हो।

Every quotient group of an abelian group is abelian.

[Kota 04; Bikaner 08, 11; Raj. 14]

But its converse is not necessarialy true. **[Udaipur 05,** 14]

उपपत्ति (Proof)—माना N आबेली ग्रुप G का एक उपग्रुप है इसलिये N भी क्रमविनिमेय होगा अतः N ग्रुप G में विशिष्ट उपग्रुप है।

सिद्ध करना है G/N क्रमविनिमेय ग्रुप होगा।

माना $Na, Nb \in G/N, a, b \in G$ के लिए

तब $(Na)(Nb) = Nab = Nba$

$= (Nb)(Na)$ [चूँकि, $ab = ba \; \forall \; a, b \in G$]

अतः $Na \, Nb = NbNa.$

$\therefore$ G/N भी एक क्रमविनिमेय समूह है।

इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है, उदाहरणार्थ S_3 एक अक्रमविनिमेय ग्रुप है तथा A_3 एकान्तर (Alternating) ग्रुप है A_3, S_3 में एक विशेष उपग्रुप है इसलिए S_3/A_3 एक खण्ड (विभाग) ग्रुप है।

S_3/A_3 में केवल दो अवयव हैं इसलिये क्रमविनिमेय है। ($\because$ प्रत्येक ग्रुप जिसका ग्रुपांक 2 है, वह क्रमविनिमेय होता है।) जबकि S_3 क्रमविनिमेय नहीं है।

प्रमेय (Theorem) 2 : सिद्ध कीजिए कि चक्रीय ग्रुप का भागफल-समूह

उदाहरण 2. माना कि G एक ग्रुप है तथा $H = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$ तो सिद्ध कीजिए कि H, G का एक प्रसामान्य (या विशिष्ट) उपग्रुप है।

Let G be a group and $H = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$. *Show that H is a normal subgroup of G.* **[Ajmer 2001; Raj. 2000]**

अथवा (Or)

सिद्ध कीजिए कि एक ग्रुप का समूह केन्द्र उसका प्रसामान्य उपग्रुप होता है।

Show that centre of a group is a normal subgroup of the group.

[Udaipur 13]

हल : *(i)* सर्वप्रथम यह सिद्ध कीजिए कि H, G का उपग्रुप है। इसके लिए देखें उदाहरण 7 पृष्ठ 101।

(ii) अब H को G का प्रसामान्य उपग्रुप सिद्ध करने के लिए मान लो कि $x \in G$ तथा $h \in H$, तब

$$\begin{aligned} xhx^{-1} &= (xh)x^{-1} \\ &= (hx)x^{-1} \qquad [\because h \in H \Rightarrow xh = hx] \\ &= h(xx^{-1}) = he = h \in H \end{aligned}$$

अत: *(i)* तथा *(ii)* से

H, G का उपग्रुप है तथा $x \in G, h \in H$ के लिए $xhx^{-1} \in H$

अत: H, G का प्रसामान्य (या विशिष्ट उपग्रुप है)।

अतः R शून्य भाजक रहित है ।

प्रमेय (Theorem) 3. वलय $[Z_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}, +_p, \bullet_p]$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है यदि और केवल यदि p अभाज्य है।

Ring $[Z_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}, +_p, \bullet_p]$ *is an integral domain iff p is prime.* **[Kota 04, 05, 08, 14; Raj. 02; Ajmer 03, 05; Bikaner 12, 15]**

उपपत्ति (Proof) : क्योंकि Z_p के अवयव पूर्णांक है इसलिए Z_p एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है ।

माना कि p एक अभाज्य संख्या है तथा $x, y \in Z_p$ ऐसे दो अवयव है कि $x \bullet_p y = 0$, तब

$$x \;_p\, y \Rightarrow p \mid xy$$
$$\Rightarrow p \mid x \text{ या } p \mid y$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ या } y = 0 \quad [\because p \text{ अभाज्य माना है और } 0 \le a < p,\ 0 \le b < p]$$

$\therefore$ Z_p शून्य के भाजकों रहित क्रमविनिमय तत्समकी वलय है अर्थात् Z_p एक पूर्णांकीय प्रान्त है ।

विलोमतः —अब माना Z_p एक पूर्णांकीय प्रान्त है । पूर्णांकीय प्रान्त की परिभाषानुसार Z_p शून्य के भाजक रहित होगा अर्थात्

किन्हीं $x, y \in Z_p$ के लिए $x \bullet_p y = 0 \Rightarrow x = 0$ या $y = 0$

अब माना p अभाज्य संख्या नहीं है तो p के दो खण्ड माना p_1, p_2 ऐसे होंगे कि

$$p = p_1 . p_2 \qquad \text{जहाँ} \quad 0 < p_1 < p,\ 0 < p_2 < p$$

तब $p_1 \bullet_p p_2 = p_1 p_2 = p = 0 \Rightarrow Z_p$ में p_1, p_2 शून्य भाजक अवयव हैं ।

इसलिए Z_p पूर्णांकीय प्रान्त नहीं हो सकता जो कि विरोधाभास है अथवा असत्य है ।

अतः p अभाज्य संख्या है ।

प्रमेय (Theorem) 4. किसी तत्समकी वलय के एकाकों का समुच्चय

प्रमेय (Theorem) 6. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त है परन्तु इसका विलोम सत्य हो यह आवश्यक नहीं है।

Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.

[Ajmer 03, 05, 08; Udaipur 03, 08, 12, 15
Bikaner 05, 13; Kota 05, 07, 12, 15; Raj. 09]

उपपत्ति (Proof) : माना कि F एक क्षेत्र है तथा $a, b \in F, a \neq 0$ तो

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \text{ [चूँकि, } a \neq 0, a \in F \Rightarrow a^{-1} \in F]$$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $b \neq 0$ तो

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$$

फलतः $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ या $b = 0$

इसलिए क्षेत्र F शून्य के भाजक रहित है। अतः क्षेत्र F एक पूर्णांकीय प्रान्त है।

परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता क्योंकि पूर्णांकों का वलय $\langle Z, +, \cdot \rangle$ एक ऐसा वलय है जो कि पूर्णांकीय प्रान्त तो है परन्तु इसका प्रत्येक अशून्य अवयव प्रतिलोमी नहीं होता, $(-1, 1)$ के अतिरिक्त किसी भी अशून्य अवयव का प्रतिलोम Z में नहीं है।

[Udaipur 2005]

$\therefore$ $f(G)$, G' का उपग्रुप है।

प्रमेय (Theorem) 3 : यदि f ग्रुप G से G' पर एक समाकारिता हो तो f की अष्टि K ग्रुप G का उपग्रुप होता है। [Udaipur 15]

If f is a homomorphism of a group G to a group G' with kernel K, then K is a subgroup of G. **[Kota 05, 15; Bikaner 07, Ajmer 07,12]**

उपपत्ति (Proof) : माना कि ग्रुप G तथा ग्रुप G' के क्रमशः तत्समक अवयव e तथा e' हैं। साथ ही यह भी माना कि $*, o$, G तथा G' का द्विआधारी संक्रिया है। अष्टि (Kernel) की परिभाषा से

$$K = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$$

क्योंकि $f(e) = e'$, $\therefore e \in K \Rightarrow K \neq \phi$

माना $a, b \in K \Rightarrow f(a) = f(b) = e' \in G'$

पुनः $f(a * b^{-1}) = f(a) \, o \, f(b^{-1})$

$= f(a) \, o \, [f(b)]^{-1}$ [f एक समाकारिता है]

$= e' \, o \, [e']^{-1}$

$= e' \, o \, e' = e'$

$\therefore$ $a * b^{-1} \in K$

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि

$$a \in K, b \in K \Rightarrow a * b^{-1} \in K$$

$\therefore$ अष्टि K, ग्रुप G का एक उपग्रुप है।

क्रमविनिमेय है ।

प्रमेय (Theorem) 5 : एक ग्रुप G की समाकारिता f, ग्रुप G' में एकैकी (समाकृतिकता) है यदि और केवल यदि f की अष्टि $=\{e\}$ जहाँ e, G में तत्समक है ।

A homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism iff kernel of $f = \{e\}$, where e is the identity in G.

[Kota 05, 14; Ajmer 2000, 05, 08; Bikaner 05, 13; Udaipur 07, 09, 14; Raj. 08, 12]

उपपत्ति (Proof) : माना कि f एक एकैकी समाकारिता $(G, *)$ से (G', o) पर है तथा K, f का अष्टि है और $x \in K$ तो $f(x) = e'$

परन्तु $f(e) = e'$

अतः $f(x) = f(e) \Rightarrow x = e$ [क्योंकि f एकैकी प्रतिचित्र

किन्तु x, K का स्वेच्छागृहीत (arbitrary) अवयव है

अतः $K = \{e\}$.

विलोमतः माना कि $K = \{e\}$, यदि $x, y \in G$

तथा $f(x) = f(y)$ तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x)\, o\, [f(y)]^{-1} = f(y)\, o\, [f(y)]^{-1}$$

$$\Rightarrow f(x)\, o\, f(y^{-1}) = f(y)\, o\, f(y^{-1})$$ [f एक समाकारि

$$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = f(y * y^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow xy^{-1} \in K$$

$$\Rightarrow xy^{-1} = e$$ [चूँकि, $K = \{e$

$$\Rightarrow x = y$$

$\therefore$ f एकैकी समाकारिता है ।

प्रमेय (Theorem) 6 : यदि f समूह G से G′ पर एक समाकारिता है औ यदि $a \in$ G की कोटि परिमित हो तथा n के बराबर हो तो $f(a)$ की को (अर्थात् m), n का भाजक है ।

If f is a homomorphism of a group G on to a group G′ and if the order of $a \in G$ is finite say n then the order of f(a) i.e. m is a divisor of n.

उपपत्ति (Proof) : माना $(G, \bullet)$ तथा $(G', *)$ दो समूह हैं तो

यहाँ $o(a) = n$ (दिया हुआ है)

$\therefore a^n = e$ जहाँ n न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है

अब $e' = f(e) = f(a^n) = f(a \bullet a \bullet \ldots\ldots n$ बार)

$= f(a) * f(a) * f(a) * f(a) \ldots\ldots n$ बार

$= [f(a)]^n$

अतः यदि G' में $o[f(a)] = m$ तो m, n का भाजक होगा ।

प्रमेय (Theorem) 7 : ग्रुपों के समुच्चय में तुल्यकारिता का सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध होता है ।

The relation of isomorphism '≅' in the set of all groups, is an equivalence relation.

[Udaipur 02, 07, 10

उपपत्ति (Proof) : स्वतुल्य (Reflexive) : किसी ग्रुप G से ग्रुप G तत्समक प्रतिचित्रण $I_G : G \to G$; ग्रुप G में तुल्यकारिता (Isomorphic) होती है क्योंकि I_G एकैकी आच्छादक (one ...

परन्तु $f(e) = e'$

अतः $f(x) = f(e) \Rightarrow x = e$. [क्योंकि f एकैकी प्रतिचि

किन्तु x, K का स्वेच्छागृहीत (arbitrary) अवयव है

अतः $K = \{e\}$.

विलोमतः माना कि $K = \{e\}$, यदि $x, y \in G$

तथा $f(x) = f(y)$ **तो**

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \, o \, [f(y)]^{-1} = f(y) \, o \, [f(y)]^{-1}$$

$$\Rightarrow f(x) \, o \, f(y^{-1}) = f(y) \, o \, f(y^{-1})$$ [f एक समाकारित

$$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = f(y * y^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow xy^{-1} \in K$$

$$\Rightarrow xy^{-1} = e$$ [चूँकि, $K = \{e$

$$\Rightarrow x = y$$

$\therefore$ f एकैकी समाकारिता है ।

प्रमेय (Theorem) ...

$\ldots = \{-2, -6\}$.

प्रमेय (Theorem) 2 : किसी ग्रुप G का अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपग्रुप होगा यदि और केवल यदि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

The necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

[Raj. 2000, 12; Ajmer 2000, 11; Udaipur 03; Jodhpur 01, 12; Kota 04; Bikaner 13]

उपपत्ति (Proof) : प्रतिबन्ध की आवश्यकता : माना कि H ग्रुप G का उपग्रुप है तथा $a, b \in H$.

अतः $\quad b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H \qquad$ [∵ H एक उपग्रुप ह]

तथा $\quad a \in H, b^{-1} \in H = ab^{-1} \in H \qquad$ [उपग्रुप H में संवृत्त गुणधर्म से]

अतः यदि H, G का उपग्रुप है तो दिया हुआ प्रतिबन्ध आवश्यक है ।

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता—अब माना कि H में दिया हुआ प्रतिबन्ध सत्य है अर्थात्

$$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H.$$

चूँकि $H \neq \phi$ इसलिए H में कम से कम एक अवयव है, अतः H में एक अवयव a ले सकते हैं ।

अब $\quad a \in H, a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$

अतः H में तत्समक अवयव विद्यमान है ।

पुन: यह माना कि $b \in H$ एक स्वेच्छ अवयव है तो

$$e \in H, b \in H \Rightarrow eb^{-1} \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$$

चूँकि b, H का कोई स्वेच्छ (arbitrary) अवयव है, इसलिए H में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है।

अन्त में $a \in H, b \in H \Rightarrow a \in H, b^{-1} \in H$

$$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} = ab \in H \quad \text{[दिये हुए प्रतिबन्ध से]}$$

अत: H, G की द्विचर संक्रिया के लिए संवृत्त (closed) है।

अत: H, ग्रुप G का उपग्रुप है जिससें सिद्ध होता है कि दिया हुआ प्रतिबन्ध, H के उपग्रुप के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध भी है।

टिप्पणी : यदि ग्रुप की संक्रिया को '+' से व्यक्त किया जाए तो उपरोक्त प्रतिबन्ध $a \in H, b \in H \Rightarrow a - b \in H$ से व्यक्त किया जाता है।

उपग्रुप

अब

तत्समक अवयव

पुन:

परन्तु

अत:

$\therefore H$

एक उपग्रुप है।

प्रमेय (T

उपग्रुप होगा यदि

A non

if

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिये कि माड्यूलों m की अवशेष कक्षायें अवशेष कक्षाओं के योग के सापेक्ष एक ग्रुप बनाती हैं ।

Prove that the residue classes modulo m form a group with respect to addition of residue classes.

हल : मान लो कि सभी माड्यूलों m की अवशेष कक्षाओं के समुच्चय को I_m से व्यक्त करते हैं तो

$$I_m = \{[0]; [1], [2], \dots [m-1]\}$$

दिया हुआ है कि 'अवशेष कक्षाओं के योग' I_m में संक्रिया हैं ।

हमें बीजीय पद्धती (I_m, अवशेष कक्षाओं का योग) को ग्रुप सिद्ध करना है, जिसके लिए :

***(i)* संवृत्तता (Closure prperty)** : यदि I_m में $[x]$ तथा $[y]$ कोई दो स्वैच्छ अवशेष कक्षायें हैं तब अवशेष के कक्षाओं के योग कि परिभाषा से

$$[x] + [y] = [x + y]$$

अब यदि $x + y < m$ तब $[x + y] \in I_m$ और यदि $x + y \geq m$, तो हम

$$x + y = qm + r \text{ जहाँ } q \in Z, 0 \leq r \leq m$$

अतः $[x + y] = [qm + r] = [r] \in I_m$ $[\because 0 \leq r < m]$

फलतः $[x] \in I_m, [y] \in I_m \Rightarrow [x] + [y] \in I_m \ \forall \ [x], [y] \in I_m$

इसलिए I_m अवशेष कक्षाओं के योग संक्रिया केलिए संवृत्त (closed) है । अर्थात् समुच्चय I_m में संक्रिया 'अवशेष कक्षाओं का योग' द्विचर संक्रिया है ।

***(ii)* साहचर्यता (Associativity)** : यदि I_m में तीन स्वैच्छ अवयव $[x]$, $[y]$ तथा $[z]$ हैं तो

$$
\begin{aligned}
([x] + [y]) + [z] &= [x + y] + [z] \\
&= [(x + y) + z] \\
&= [x + (y + z)]
\end{aligned}
$$

[$\because$ पूर्णांकों में योग संक्रिया साहचर्य है]

$$
\begin{aligned}
&= [x] + [y + z] \\
&= [x] + ([y] + [z])
\end{aligned}
$$

अत: I_m में अवशेष कक्षायें, अवशेष कक्षाओं के योग के लिए साहचर्य हैं।

***(iii)* तत्समक अवयव का अस्तित्व :**

क्योंकि $0 \in Z$, योग के लिए तत्समक अवयव है इसलिए $[0] \in I_m$, I_m में तत्समक अवयव होगा क्योंकि

$$[0] + [a] = [0 + a] = [a] = [a + 0] = [a] + [0]$$

अत: $[0] + [a] = [a] = [a] + [0] \quad \forall\, [a] \in I_m$

***(iv)* प्रतिलोम का अस्तित्व**– यदि $[a]$, I_m का स्वैच्छ सदस्य है तो $0 \le a < m$ तथा इसलिए $0 < m - a < m$

इसलिए $[m - a] \in I_m$

साथ ही $[m - a] + [a] = [(m - a) + a] = [m + (a - a)]$

$$= [m + 0] = [m] = [0]$$

इसी प्रकार $[a] + [m - a] = [0]$

अत: I_m के प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम का अस्तित्व है जो I_m का अवयव है।

अत: उपरोक्त विवेचन से यह सिद्ध होता है कि I_m, अवशेष कक्षाओं के योग संक्रिया के लिए ग्रुप है।

टिप्पणी–क्योंकि I_m के किन्हीं दो स्वेच्छ अवयव $[a]$ तथा $[b]$ के लिए

$$
\begin{aligned}
[a] + [b] &= [a + b] \\
&= [b + a] \quad \text{[पूर्णांकों में योग के लिए क्रमविनिमेयता है]} \\
&= [b] + [a]
\end{aligned}
$$

अत: अवशेष कक्षाओं के योग, I_m में क्रमविनिमेय (commutative) है फलत: I_m अवशेष कक्षाओं के योग संक्रिया के लिए क्रमविनिमेय (या आबेली) ग्रुप है।

अर्थात् $G \cong Z.$

प्रमेय (Theorem) 10 : मान लें $f : G \to H$ ग्रुप G से ग्रुप H पर तुल्य-कारिता है तथा $g : H \to K$ ग्रुप H से ग्रुप K पर तुल्यकारिता है । सिद्ध कीजिए कि संयुक्त प्रतिचित्रण gof ग्रुप G से ग्रुप K पर तुल्यकारिता है ।

Let $f : G \to H$ be an isomorphism from the group G on to group H and $g : H \to K$ be an isomorphism from the group H on to the group K. Show that the composite mapping gof is an isomorphism from G on to K.

उपपत्ति (Proof) : चूँकि $f : G \to H$ तथा $g : H \to K$ दो तुल्यकारी हैं अत: f तथा g एकैकी आच्छादक हैं इसलिए फलन $gof : G \to K$ का अस्तित्व है तथा यह भी एकैकी तथा आच्छादक प्रतिचित्रण होगा ।

पुन: $\forall\, a, b \in G$ के लिए

$$(gof)\ (ab) = g\,[\,f(ab)\,]$$
$$= g\,[\,f(a)\,f(b)\,] \qquad [\text{चूँकि}, f \text{ तुल्यकारिता है}]$$
$$= g\,[\,f(a)\,]\,g\,[\,f(b)\,] \qquad [\text{चूँकि}, g \text{ तुल्यकारिता है}]$$
$$= (gof)\,(a)\,(gof)\,(b)$$

$\therefore$ gof भी ग्रुप G से ग्रुप K पर एक ग्रुप समाकारिता है ।

अत: gof ग्रुप G से ग्रुप K पर एकैकी, आच्छादक तथा समाकारिता है अत: तुल्यकारिता है ।

अत: $G \cong K.$