ASSIGNMENT

BSC - IIND SEM

PHYSICS

UNIT - 1 Q(1) सादिश क्षेत्र $\vec{A}$ हेतु सिद्ध कीजिए

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

UNIT - 2 Q. (2) किसी परावैद्युत माध्यम के लिए क्लॉसियस मोसोटी समीकरण ज्ञात कीजिए।

UNIT - (3) Q. (3) एक चालक तार 2 से.मी. भुजा वाले षट्भुजाकार आकृति के रूप में मुड़ा है। यदि इसमें 5A की धारा प्रवाहित हो रही है। षट्भुज के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र की गणना करो।

UNIT (4) Q.4 विद्युत चुम्बकीय तरंगो के लिए मैक्सवेल के समीकरण लिखिए। इन तरंगो के ऊर्जा अभिवाह के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा पॉयंटिंग सदिश की भौतिक सार्थकता बताइए।

div curl $\vec{A} = 0$

उदाहरण (Example) 11 : सदिश क्षेत्र $\vec{A}$ हेतु सिद्ध कीजिये :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

Prove that for a vector field $\vec{A}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

हल :

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{k} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\because \quad \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \end{vmatrix}$$

इसका x घटक लेने पर,

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_x = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]$$

$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ को घटाने व जोड़ने पर,

$$= \left[-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 \partial x}\right]$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$= -\nabla^2 A_x + \frac{\partial}{\partial x}(\nabla . \vec{A})$$

इसी प्रकार $(\nabla \times \nabla \times \vec{A})$ के y व z के घटक लेने पर

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_y = -\nabla^2 A_y + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla . \vec{A})$$

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_z = -\nabla^2 A_z + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla . \vec{A})$$

सभी घटक सदिशों का योग करने पर,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \hat{i}(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_x + \hat{j}(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_y + \hat{k}(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_z$$

$$= -\nabla^2(\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) + \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\nabla . \vec{A})$$

$$\therefore \quad \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla . \vec{A})$$

... के लिये

3.10 विद्युत प्रवृत्ति एवं परमाण्विक ध्रुवणता में सम्बन्ध या क्लॉसियस-मोसोटी सम्बन्ध (The Relation between Electrical Susceptibility and Atomic Polarizability or Clausius-Mossotti Relation)

जब किसी परावैद्युत को आवेशित समान्तर प्लेटों के बीच रखते हैं तो परावैद्युत के किसी एक परमाणु पर न केवल आरोपित बाह्य क्षेत्र कार्य करता है बल्कि परावैद्युत के अन्य परमाणुओं के द्विध्रुवों के विद्युत क्षेत्र भी कार्य करते हैं इसलिए परावैद्युत के किसी एक परमाणु पर कार्यरत विद्युत क्षेत्र, लगाये गये बाह्य क्षेत्र से भिन्न होता है। 'परावैद्युत के एक परमाणु पर कार्यरत् विद्युत क्षेत्र को स्थानीय क्षेत्र (local field) भी कहते हैं। परावैद्युत के किसी परमाणु की स्थिति पर स्थानीय क्षेत्र की गणना लॉरेन्ज (Lorentz) की विधि द्वारा निम्न रूप से की जाती है।

परावैद्युत के जिस परमाणु पर स्थानीय क्षेत्र ज्ञात करना होता है उसको केन्द्र O मानकर इतना बड़ा गोला खींचते कि जिसके बाहर परावैद्युत माध्यम को सतत् एवं समांगी (continuous and homogeneous) माना जा सके और अन्य परमाणुओं की विवक्त संरचना (discrete structure) से बना माना जा सके। अब हम देखते हैं कि गोले के केन्द्र O पर स्थानीय विद्युत क्षेत्र चार क्षेत्रों से मिलकर बना होता है।

∴ स्थानीय क्षेत्र $$E_l = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{.....(1)}$$

यहां E_0 आरोपित बाह्य विद्युत क्षेत्र, E_1 परावैद्युत के बाह्य सीमान्त पृष्ठों पर प्रेरित ध्रुवण आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्र, E_2 गोले के पृष्ठ पर प्रेरित ध्रुवण आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्र जब गोले वाला भाग हटा दिया जाय तथा E_3 गोले के अन्दर अन्य द्विध्रुवों के कारण विद्युत क्षेत्र है; देखिये चित्र (20)।

अब हम उपरोक्त विभिन्न क्षेत्रों का परिकलन करते हैं।

(i) बाह्य क्षेत्र E_o : परावैद्युत की अनुपस्थिति में संधारित्र के आवेशित प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र बाह्य विद्युत क्षेत्र कहलाता है। यदि समान्तर प्लेटों पर स्वतंत्र पृष्ठ आवेश घनत्व $+\sigma_{free}$ तथा $-\sigma_{free}$ है तो O बिन्दु पर बाह्य क्षेत्र

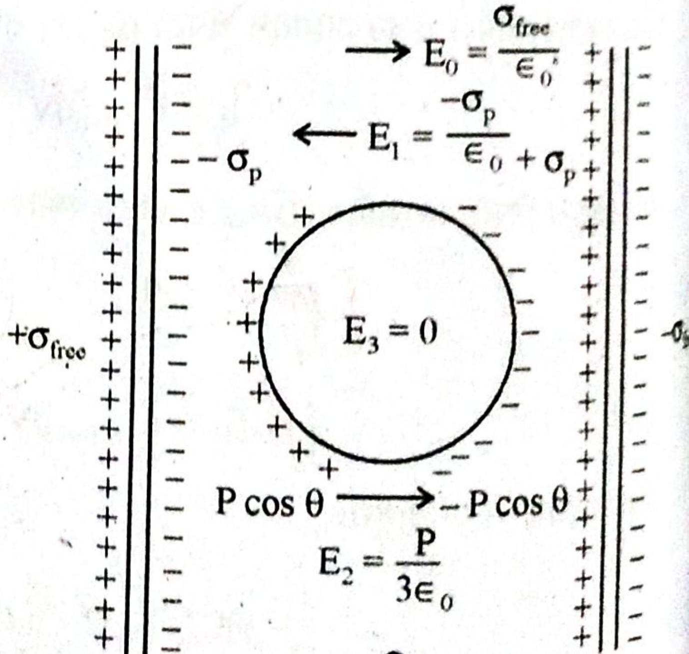
$$E_o = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0} \quad \text{.....(2)}$$

यहां $D = \sigma_{free}$ विद्युत विस्थापन होता है।

(ii) ध्रुवण क्षेत्र E_1 : जब परावैद्युत पट्टिका को समान्तर प्लेटों के बीच रखते हैं तो बाह्य विद्युत क्षेत्र के कारण परावैद्युत परमाणु द्विध्रुव के समान व्यवहार करने लगते हैं इसके फलस्वरूप संधारित्र की धनात्मक प्लेट से सम्पर्क करती हुई परावैद्युत के पृष्ठ पर ऋणआवेश तथा ऋणात्मक प्लेट से सम्पर्क करती हुई परावैद्युत के पृष्ठ पर धन आवेश प्रेरित हो जाता है। यदि परावैद्युत के विपरीत पृष्ठों पर प्रेरित आवेश घनत्व $+\sigma_p$ तथा $-\sigma_p$ हो तो बिन्दु O पर विद्युत क्षेत्र

$$E_1 = -\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

यहां $P = \sigma_p$ परावैद्युत में प्रेरित ध्रुवण होता है।



चित्र (20)

(iii) विद्युत क्षेत्र E_2 : यदि प्लेटों के मध्य परावैद्युत में से गोले वाला भाग हटा दिया जाय तो संधारित्र के धन प्लेट की ओर अन्तः गोलार्द्ध पृष्ठ पर धन आवेश तथा ऋण प्लेट की ओर वाले अन्तः गोलार्द्ध पर ऋण आवेश प्रेरित हो जाता है। इस प्रकार परावैद्युत रहित गोलीय भाग ध्रुवित गोले (polarized sphere) के समान माना जा सकता है। ऐसे ध्रुवित गोले

के कारण बिन्दु O पर विद्युत क्षेत्र होगा–

$$E_2 = \frac{P}{3\epsilon_0} \qquad .....(4)$$

(iv) विद्युत क्षेत्र E_3 : यह गोले के अन्दर उपस्थित द्विध्रुवों के कारण O पर विद्युत क्षेत्र है। भिन्न–भिन्न द्विध्रुवों के क्षेत्रों को जोड़कर E_3 क्षेत्र का मान ज्ञात किया जा सकता है। यह देखा गया है कि कई परिस्थितियों में E_3 का मान शून्य होता है। गैसों, तनु घोलों (dilute solutions) तथा घन संरचना (cubical structure) वाले ठोस परावैद्युतों में E_3 का मान नगण्य होता है। कुछ अवस्थाओं में E_3 का मान नगण्य नहीं होता है परन्तु यहां केवल उन्हीं परावैद्युतों के लिए स्थानीय क्षेत्र ज्ञात कर रहे हैं जिनमें E_3 का मान लगभग शून्य होता है।

समीकरण (2), (3), (4) को समीकरण (1) में रखने पर

$$E_l = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

या

$$E_l = \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0} + \frac{P}{3\epsilon_0} \qquad .....(5)$$

लेकिन, विद्युत विस्थापन

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$\therefore$

$$E_l = \frac{D-P}{\epsilon_0} + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$= E + \frac{P}{3\epsilon_0} \qquad .....(6)$$

विद्युत क्षेत्र E को मैक्सवेल–क्षेत्र (Maxwell's field) तथा E_l स्थानीय क्षेत्र को लॉरेन्ज–क्षेत्र (Lorentz field) भी कहते हैं। मैक्सवेल क्षेत्र E एक स्थूल (macroscopic) क्षेत्र होता है और परमाणुओं के लिए औसत क्षेत्र को व्यक्त करता है। इसका मान सम्पूर्ण परावैद्युत में नियत रहता है। लॉरेन्ज–क्षेत्र एक सूक्ष्म (microscopic) क्षेत्र होता है तथा परावैद्युत के किसी एक परमाणु पर लगता है। इस क्षेत्र के कारण परमाणु अधिक प्रभावी ढंग से ध्रुवित होते हैं।

स्थानीय क्षेत्र के प्रभाव से परमाणु में द्विध्रुव आघूर्ण p, क्षेत्र की दिशा में प्रेरित होता है और द्विध्रुव आघूर्ण p का मान क्षेत्र E_l के अनुक्रमानुपाती होता है

अर्थात् $p \propto E_l$

या $\quad p = \alpha E_l$

यहां α परमाण्विक ध्रुवणता (atomic polarizability) है। यदि परावैद्युत में परमाणुओं की संख्या प्रति एकांक आयतन में N है तो प्रति एकांक आयतन में कुल द्विध्रुव आघूर्ण

$$P = Np = N\alpha E_l$$

E_l का मान समीकरण (6) से रखने पर

$$P = N\alpha\left(E + \frac{P}{3\epsilon_0}\right) \qquad .....(8)$$

या

$$P = \frac{N\alpha E}{1 - N\alpha/3\epsilon_0} \qquad .....(9)$$

परन्तु

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

यहां χ विद्युत प्रवृत्ति है।

$$\therefore \quad P = \epsilon_0 \chi E = \frac{N\alpha E}{1 - N\alpha / 3\epsilon_0}$$

या

$$\chi = \frac{N\alpha / \epsilon_0}{1 - N\alpha / 3\epsilon_0}$$

या

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\chi}{\chi + 3}$$

लेकिन

$$\chi = \epsilon_r - 1$$

अतः

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

समीकरण (11) को **क्लासियस-मोसोटी** सम्बन्ध कहते हैं।

यदि परावैद्युत का परमाणु भार M_A, घनत्व ρ तथा एवोगाद्रो संख्या N_A है तो प्रति एकांक आयतन में परमाणुओं की संख्या

$$N = \frac{\rho N_A}{M_A}$$

N का मान समीकरण (11) में रखने पर

$$\frac{N_A \alpha}{3\epsilon_0} = \frac{M_A}{\rho}\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)$$

इस समीकरण द्वारा परावैद्युत की परमाणविक ध्रुवणता α तथा मोलर ध्रुवणता $N_A\alpha$ प्राप्त की जा सकती है।

Unit-3 Q. (3)

उदाहरण (Example) 22 : एक चालक तार 2 सेमी भुजा वाले षटभुजाकार आकृति के रूप में मुड़ा है। यदि इसमें 5 एम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है तो षटभुज के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र की गणना करो।

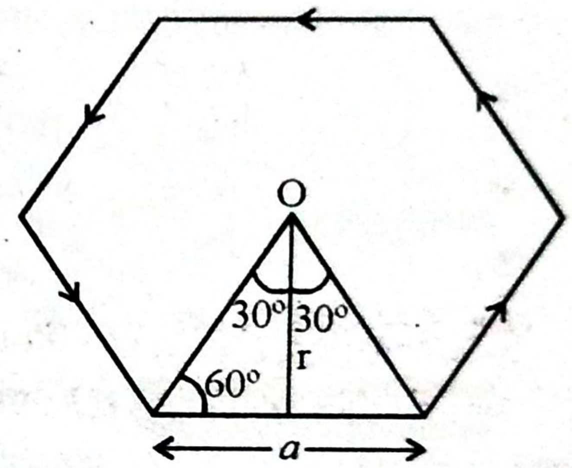
A conducting wire is folded in form of hexagonal shape of side 2 cm. If 5 amp current is passing in it, find magnetic field at the centre of the hexagon.

[R. U. 2005, 2009, 2012]

हल : a भुजा वाली षटभुजाकार आकृति वाले धारावाही चालक के केन्द्र O पर बनाया कोण

$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$



तथा भुजाओं की केन्द्र O से दूरी

$$r = \frac{a}{2}\tan 60^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

∴ षटभुजाकार आकृति के केन्द्र O पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha + \sin\alpha)$$

$$B_1 = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a\sqrt{3}}\sin 30 = \frac{\mu_0 I}{(2\sqrt{3})a\pi}$$

∴ षटभुजाकार की 6 भुजाओं के कारण केन्द्र O पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = 6B_1 = \frac{6\mu_0 I}{(2\sqrt{3})\pi a}$$

$$B = \frac{\mu_0 I \sqrt{3}}{\pi a}$$

चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा कुण्डली के तल के लम्बवत् होगी।

सवेल का प्रथम समीकरण (Maxwell's First Equation)

Unit-(4) Q.(4)

सवेल का प्रथम समीकरण विद्युत क्षेत्र के लिए गाउस के नियम से प्राप्त किया जा सकता है। गाउस का नियम न्द पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स (outgoing electric flux) तथा उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश (enclosed total) के मध्य सम्बन्द्ध स्थापित करता है। **गॉस के नियमानुसार किसी बन्द काल्पनिक पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स न उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश का 1/∈ गुने के बराबर होता है।** यहाँ माध्यम की विद्युतशीलता ∈ है। अतः न्द पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स ϕ_E तथा बन्द पृष्ठ से परिबद्ध कुल आवेश q हो तो

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon} \quad .....(1)$$

णितीय परिभाषा से किसी पृष्ठ अल्पांश से निर्गत विद्युत फ्लक्स उस अल्पांश की स्थिति पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा सदिश $\vec{da}$ के अदिश गुणनफल के बराबर होता है।

∴ सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स

$$\phi_E = \oint_S \vec{E}.\vec{da} \quad .....(2)$$

यहाँ समाकल चिन्ह $\oint_S$ बन्द पृष्ठ के पूर्ण क्षेत्रफल पर समाकल को व्यक्त करता है।

यदि बन्द पृष्ठ में परिबद्ध आवेश सतत् रूप से वितरित हो और आयतन आवेश घनत्व ρ हो तो बन्द पृष्ठ में परिबद्ध आवेश

$$q = \oint_V \rho dV \quad .....(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) को (1) में रखने पर

$$\oint_S \vec{E}.\vec{da} = \oint_V \rho dV \quad .....(4)$$

यह मैक्सवेल के प्रथम समीकरण का समाकल रूप है।

मैक्सवेल के प्रथम समीकरण (4) को अवकल रूप में लिखने के लिए गॉस डाइवर्जेन्स प्रमेय का उपयोग करते हैं जो समाकल को आयतन– समाकल में परिवर्तित कर देता है। इस प्रमेय के अनुसार

$$\oint_S \vec{E}.\vec{da} = \oint_V \left(\nabla.\vec{E}\right) dV \quad .....(5)$$

समीकरण (4) तथा (5) की तुलना करने पर

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad .....(6)$$

समीकरण (6) **मैक्सवेल के प्रथम समीकरण का अवकल रूप है।**

यदि माध्यम समांगी एवं समदैशिक हो तो समीकरण (6) से

$$\nabla.(\epsilon \vec{E}) = \rho$$

परन्तु विस्थापन सदिश $D = \epsilon E$

$$\therefore \quad \nabla . \vec{D} = \rho$$

(ii) मैक्सवेल का द्वितीय समीकरण (Maxwell's Second Equation)

मैक्सवेल का द्वितीय समीकरण चुम्बकीय क्षेत्र के लिए गाउस के नियम से प्राप्त किया जा सकता है। हम जा कि चुम्बकीय क्षेत्र में बल रेखाएँ सदैव बन्द वक्र के रूप में होती है अर्थात चुम्बकीय बल रेखाओं का न तो स्त्रोत ह और न ही सिंक (sink)। इसलिए किसी बन्द पृष्ठ से जितनी बल रेखाएँ निर्गत होती हैं उतनी ही बल रेखाएँ बन पर आगत होती है। दूसरे शब्दों में **बन्द पृष्ठ से निर्गत परिणामी चुम्बकीय फ्लक्स (कुल बल रेखाओं की संख मान शून्य के बराबर होता है।** यह चुम्बकीय क्षेत्र के लिए गाउस का नियम कहलाता है। गणितीय रूप से

परिणामी चुम्बकीय फ्लक्स $\phi_B = 0$

विद्युत फ्लक्स के समान चुम्बकीय फ्लक्स की परिभाषा से

$$\phi_B = \oint_S \vec{B}.\vec{da}$$

$$\therefore \quad \oint_S \vec{B}.\vec{da} = 0$$

गाउस डाइवर्जेन्स प्रमेयानुसार पृष्ठ समाकलन को आयतन समाकलन में परिवर्तित कर सकते हैं, तदनुसार

$$\oint_S \vec{B}.\vec{da} = \oint_V (\nabla . \vec{B})dV$$

समीकरण (4) को (3) में रखने पर

$$\oint_V (\nabla . \vec{B})dV = 0$$

जिससे

$$\nabla . \vec{B} = 0$$

समीकरण (3) मैक्सवेल के द्वितीय समीकरण का समाकल रूप है तथा समीकरण (5) अवकल रूप है।

(iii) मैक्सवेल का तृतीय समीकरण (Maxwell's Third Equation)

मैक्सवेल का तृतीय समीकरण फैराडे के विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के नियम से प्राप्त किया जाता है। इस नियम के **परिपथ में प्रेरित वि. वा. बल परिपथ से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स के परिवर्तन की दर के बराबर होता है औ वि. वा. बल की दिशा इस प्रकार होती है कि यह चुम्बकीय फ्लक्स के परिवर्तन का विरोध करें।**

माना किसी बन्द परिपथ C द्वारा घिरे क्षेत्रफल S से निर्गत चुम्बकीय फ्लक्स ϕ_B के समय के सापेक्ष परिवर्तन के परिपथ में ε वि. वा. बल प्रेरित होता है तो फैराडे के विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के नियम से

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$

किसी परिपथ C के अनुदिश एकांक धन आवेश को ले जाने में किया गया कार्य वि. वा. बल के बराबर होता है शब्दों मे विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल वि. वा. बल के बराबर होता है। अतः

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}.\vec{dl}$$

तथा चुम्बकीय फ्लक्स की परिभाषा से

$$\phi_B = \oint_S \vec{B}.\vec{da} \qquad .....(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) को (1) में रखने पर,

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{B}.\vec{da} \qquad .....(4)$$

समय t तथा क्षेत्रफल a दोनों स्वतन्त्र चर राशियाँ होने के कारण समाकल तथा अवकल संकारकों का प्रतिस्थापन कर सकते हैं।

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\oint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).\vec{da} \qquad .....(5)$$

यह समाकल रूप में मैक्सवेल का तृतीय समीकरण है।

स्टोक के कर्ल प्रमेय का उपयोग कर रेखा समाकल को पृष्ठ समाकल में बदला जा सकता है जिससे

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \oint_S (\nabla \times \vec{E}).\vec{da} \qquad .....(6)$$

समीकरण (5) तथा (6) की तुलना करने पर

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad .....(7)$$

उपरोक्त समीकरण (7) **मैक्सवेल के तृतीय समीकरण का अवकल रूप है।** यह चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ के समय के सापेक्ष परिवर्तन का विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ से सम्बद्ध स्थापित करता है।

(iv) मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण (Maxwell's fourth equation)

मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण एम्पियर के परिपथीय नियम से प्राप्त किया जा सकता है। एम्पियर के नियम के अनुसार **चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित किसी बन्द पथ के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र का रेखा समाकल बन्द पथ द्वारा घेरे गये क्षेत्र से गुजरने वाली कुल धारा I के μ गुना के बराबर होता है।** यहाँ μ माध्यम की पारगम्यता है।

$$\therefore \qquad \oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu I \qquad .....(1)$$

यदि धारा घनत्व या धारा प्रति एकांक क्षेत्रफल $\vec{J}$ है तो बन्द पथ C से घिरे क्षेत्रफल S से गुजरने वाली धारा का मान होगा।

$$I = \oint_S \vec{J}.\vec{da} \qquad .....(2)$$

समीकरण (2) को (1) में रखने पर,

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu \oint_S \vec{J}.\vec{da} \qquad .....(3)$$

स्टोक के कर्ल प्रमेयानुसार समीकरण (3) के रेखा–समाकल को पृष्ठ समाकल में बदलने पर

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \oint_S (\nabla \times \vec{B}).\vec{da} \qquad .....(4)$$

समीकरण (3) तथा (4) की तुलना करने पर

$$\phi_B = \oint_S \vec{B}.\vec{da}$$ .....(3)

समीकरण (2) तथा (3) को (1) में रखने पर,

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{B}.\vec{da}$$ .....(4)

समय t तथा क्षेत्रफल a दोनों स्वतन्त्र चर राशियाँ होने के कारण समाकल तथा अवकल संकारकों का प्रतिस्थापन कर सकते हैं।

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\oint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).\vec{da}$$ .....(5)

यह समाकल रूप में मैक्सवेल का तृतीय समीकरण है।

स्टोक के कर्ल प्रमेय का उपयोग कर रेखा समाकल को पृष्ठ समाकल में बदला जा सकता है जिससे

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \oint_S (\nabla \times \vec{E}).\vec{da}$$ .....(6)

समीकरण (5) तथा (6) की तुलना करने पर

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ .....(7)

उपरोक्त समीकरण (7) **मैक्सवेल के तृतीय समीकरण का अवकल रूप है।** यह चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ के समय के सापेक्ष परिवर्तन का विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ से सम्बद्ध स्थापित करता है।

(iv) मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण (Maxwell's fourth equation)

मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण एम्पियर के परिपथीय नियम से प्राप्त किया जा सकता है। एम्पियर के नियम के अनुसार **चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित किसी बन्द पथ के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र का रेखा समाकल बन्द पथ द्वारा घेरे गये क्षेत्र से गुजरने वाली कुल धारा I के μ गुना के बराबर होता है।** यहाँ μ माध्यम की पारगम्यता है।

$$\therefore \quad \oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu I$$ .....(1)

यदि धारा घनत्व या धारा प्रति एकांक क्षेत्रफल $\vec{J}$ है तो बन्द पथ C से घिरे क्षेत्रफल S से गुजरने वाली धारा का मान होगा।

$$I = \oint_S \vec{J}.\vec{da}$$ .....(2)

समीकरण (2) को (1) में रखने पर,

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu \oint_S \vec{J}.\vec{da}$$ .....(3)

स्टोक के कर्ल प्रमेयानुसार समीकरण (3) के रेखा–समाकल को पृष्ठ समाकल में बदलने पर

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \oint_S (\nabla \times \vec{B}).\vec{da}$$ .....(4)

समीकरण (3) तथा (4) की तुलना करने पर

.6 विद्युत चुम्बकीय तरंगों का ऊर्जा घनत्व (Energy Density of Electromagnetic Waves)

हम सभी इस तथ्य से परिचित हैं कि प्रकाश एक प्रकार की ऊर्जा है जो निर्वात् में 3×10^8 मीटर प्रति सेकण्ड के वेग से गति करती है। मैक्सवेल के अनुसार एक स्थान से दूसरे स्थान की ओर प्रकाश ऊर्जा का संचरण विद्युत चुम्बकीय तरंगों द्वारा होता है। ऊर्जा संचरण का अध्ययन विद्युत चुम्बकीय तरंगों के कारण आकाश में विद्यमान ऊर्जा घनत्व द्वारा करते हैं। आकाशीय एकांक आयतन में विद्यमान तरंग ऊर्जा को ऊर्जा घनत्व द्वारा व्यक्त करते हैं। विद्युत–चुम्बकीय तरंगों के लिए इसका मान मैक्सवेल के तृतीय एवं चतुर्थ समीकरणों से ज्ञात किया जा सकता है। मैक्सवेल के तृतीय एवं चतुर्थ समीकरण से

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{.....(1)}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) का $\vec{B}$ के साथ अनुदिश गुणनफल करने पर

$$\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}B^2 \quad \text{.....(3)}$$

इसी प्रकार समीकरण (2) का $\vec{E}$ के साथ अदिश गुणनफल करने पर,

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu \vec{E} \cdot \vec{J} + \mu \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{\mu \epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \quad \text{.....(4)}$$

समीकरण (3) से (4) को घटाने पर,

$$\vec{B}.(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}.(\nabla\times\vec{B})=-\mu\vec{E}.\vec{J}-\frac{\mu}{2}\left(\in\frac{\partial}{\partial t}E^2+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}B^2\right)$$

सदिश बीजगणित से,

$$\nabla.(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}.(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}.(\nabla\times\vec{B})$$

$$\therefore\ \vec{B}.(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}.(\nabla\times\vec{B})=\nabla.(\vec{E}\times\vec{B})=-\mu\vec{E}.\vec{J}-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\in E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu}\right) \quad .....(5)$$

या

$$\nabla.\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu}\right)=-\vec{E}.\vec{J}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\in E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu}\right) \quad .....(6)$$

या

$$\nabla.\vec{P}+\frac{\partial U}{\partial t}=-\vec{E}.\vec{J} \quad .....(7)$$

यहां

$$\vec{P}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu}=\vec{E}\times\vec{H} \quad .....(8)$$

तथा

$$U=\frac{\in E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu} \quad .....(9)$$

किसी बन्द पृष्ठ S के द्वारा घिरे आयतन V के लिए समीकरण (7) का समाकलन करने पर

$$\oint_V(\nabla.\vec{P})dV+\oint_V\frac{\partial U}{\partial t}dV=-\oint_V(\vec{E}.\vec{J})dV \quad .....(10)$$

गॉस डाइवर्जेन्स प्रमेय से किसी सदिश $\vec{P}$ के लिए

$$\oint_V(\nabla.\vec{P})dV=\oint_S\vec{P}.\vec{ds}$$

इसी समीकरण को समीकरण (10) में रखने पर

$$\oint_S\vec{P}.\vec{ds}+\oint_V\frac{\partial U}{\partial t}dV=-\oint_V(\vec{E}.\vec{J})dV \quad .....(11)$$

यदि समीकरण (11) सम्पूर्ण आकाश के लिए हो तो आकाश को घेरने वाला पृष्ठ अनन्त दूरी पर होगा और अनन्त पर विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र का मान शून्य माना जा सकता है।

$\therefore$

$$\oint_V (\vec{E}\times\vec{B}).\vec{ds} = 0$$

जिससे

$$\oint_S \vec{P}.\vec{ds} = 0$$

$\therefore$ समीकरण (11) से

$$\oint \frac{\partial U}{\partial t} dV = -\oint (\vec{E}.\vec{J}) dV \quad \text{.....(12)*}$$

अतः समीकरण (12) से $\oint \frac{\partial U}{\partial t} dV = -\oint \frac{\partial w}{\partial t} dV$

या

$$U = -w \quad \text{.....(13)}$$

अतः समीकरण (13) से U = ऊर्जा प्रति एकांक आयतन = ऊर्जा घनत्व

$\therefore$ समीकरण (9) से विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा घनत्व

$$U = \left(\frac{\in E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}\right) \quad \text{.....(14)}$$

---

* उपरोक्त समीकरण (12) का भौतिक महत्व समझने के लिए माना n इलेक्ट्रॉन प्रति एकांक आयतन वाले माध्यम में विद्युत चुम्बकीय तरंग आपतित होकर पूर्णतया अवशोषित हो जाती है। अतः तरंग की सम्पूर्ण ऊर्जा माध्यम के इलेक्ट्रॉनों के कार्य करने में उपयोग में आती है।

$\therefore$ विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा = – इलेक्ट्रॉनों के द्वारा किया गया कुल कार्य

विद्युत चुम्बकीय तरंग के विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ के कारण एकांक आयतन के इलेक्ट्रॉनों पर लगा लॉरेन्ज बल

$$\vec{F} = -ne(\vec{E} + \vec{v_e} \times \vec{B})$$

यहाँ $\vec{v_e}$ इलेक्ट्रॉनों का वर्ग माध्य मूल वेग है।

उपरोक्त समीकरण को $\vec{v_e}$ से अदिश गुणनफल करने पर,

$$\vec{F}.\vec{v_e} = -ne(\vec{E}.\vec{v_e} + \vec{v_e}.\vec{v_e} \times \vec{B})$$

सदिश बीज गणित से

$$\vec{v_e}.\vec{v_e} \times \vec{B} = \vec{B}.(\vec{v_e} \times \vec{v_e}) = 0$$

$$\therefore \quad \vec{F}.\vec{v_e} = -ne(\vec{E}.\vec{v_e})$$

$\therefore$ इलेक्ट्रॉनों के कार्य करने की दर $= \vec{F}.\vec{v_e}$

$$= (\vec{E}.\vec{J})$$

$\because$ धारा घनत्व $\vec{J} = -ne\vec{v_e}$

यदि एकांक आयतन के इलेक्ट्रॉनों द्वारा किया गया कार्य w हो तो

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E}.\vec{J}$$

हम जानते हैं कि विद्युत चुम्बकीय तरंग के विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ में निम्न सम्बन्ध होता है। [खण्ड 6.5 के समीकरण (24)] से

$$|\vec{B}| = \frac{1}{v}|\vec{E}| \qquad .....(15)$$

समीकरण (15) को (14) में रखने पर,

ऊर्जा घनत्व
$$U = \frac{\in E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu v}$$

परन्तु विद्युत चुम्बकीय तरंग वेग
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\in}}$$

$$\therefore \quad U = \frac{\in E^2}{2} + \frac{\in E^2}{2}$$

$\therefore$ ऊर्जा घनत्व
$$U = \in E^2 \ \ J/m^3 \qquad .....(16)$$

माध्य ऊर्जा घनत्व
$$<U> = \in <E^2>$$

विद्युत चुम्बकीय तरंगों के लिए

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx) \qquad .....(17)$$

$\therefore$ माध्य ऊर्जा घनत्व
$$<U> = \in E_0{}^2 < \sin^2(\omega t - kx)>$$

$\therefore$ एक आवर्तकाल के लिए $\sin^2(\omega t - kx)$ का औसत मान 1/2 होता है।

$\therefore$ माध्य ऊर्जा घनत्व
$$<U> = \frac{1}{2}\in E_0^2 \quad J/m^3 \qquad .....(18)$$

7 ऊर्जा फ्लक्स तथा पॉयटिंग सदिश (Energy Flux and Poynting Vector)

विद्युत चुम्बकीय तरंगों के संचरण दिशा के लम्बवत् स्थित एकांक क्षेत्रफल से ऊर्जा प्रवाह की दर को ऊर्जा फ्लक्स सदिश $\vec{P}$ से व्यक्त किया जाता है। इस ऊर्जा फ्लक्स सदिश को हेनरी पॉयटिंग के नाम पर पॉयटिंग सदिश (Poynting vector) भी कहते हैं।

विद्युत–चुम्बकीय ऊर्जा घनत्व

$$U = \left(\frac{\in E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}\right)$$

$\therefore$ कुल ऊर्जा
$$W = \oint_V U dV$$

$\therefore$ ऊर्जा प्रवाह की दर
$$= -\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_V \frac{\partial U}{\partial t} dV$$

या
$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\in E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}\right) dV$$

चूँकि
$$\frac{\partial}{\partial t}E^2 = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}.\vec{E}) = 2\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\left(\in \vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV \quad .....(19)$$

मुक्ताकाश में मैक्सेवल के तृतीय तथा चतुर्थ समीकरण से,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\in \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

समीकरण (19) में रखने पर,

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\oint_V\left[\vec{E}.(\nabla \times \vec{B}) - \vec{B}.(\nabla \times \vec{E})\right] dV \quad .....(20)$$

सदिश बीजगणित से,

$$\nabla.(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B}.(\nabla \times \vec{E}) - \vec{E}.(\nabla \times \vec{B})$$

$\therefore$
$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\oint_V \nabla.(\vec{E} \times \vec{B})\, dV \quad .....(21)$$

गाउस के डाइवर्जेन्स प्रमेयानुसार

$$\oint_V (\nabla.\vec{A})\, dV = \oint_S \vec{A}.\vec{ds}$$

$\therefore$ ऊर्जा प्रवाह की दर

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\oint_S (\vec{E} \times \vec{B}).\vec{ds} \quad .....(22)$$

$\therefore$ एकांक क्षेत्रफल के लम्बवत् ऊर्जा प्रवाह की दर

$$= \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) \quad .....(23)$$

$\therefore$ पॉयटिंग सदिश $\vec{P} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) = (\vec{E} \times \vec{H})$ W/m^2

जहां सदिश $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$